NGUYỄN NGỌC THU

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

HÌNH HỌC TRONG KHÔNG GIAN

Gồm:
IV chương
với 24 chủ đề,
giải bài tập
mẫu

TỰ LUẬN

Z
A$_1$
B$_1$
D$_1$
C$_1$
A
B
X
D
C
Y

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN NGỌC THU

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN
HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

DÀNH CHO HỌC SINH 11 – 12 – LTĐH

★ Với 24 chủ đề, mỗi chủ đề có :
- *Bài tập giải mẫu*
- *Bài tập rèn luyện*

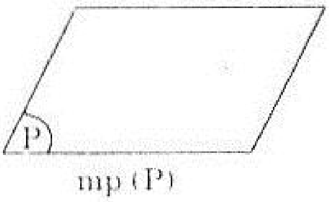
★ Toán tổng hợp cuối chương
★ Trắc nghiệm cuối chương

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Chương I. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ SONG SONG

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

A. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG



Mặt phẳng : *Trang giấy, mặt bảng, mặt hồ lặng gió... cho chúng ta một phần của mặt phẳng trong không gian.*

1. Kí hiệu

Cho điểm A, đường thẳng a và mặt phẳng (P). Ta kí hiệu như sau :

- *Điểm A thuộc đường thẳng a : $A \in a$*
- *Điểm A không thuộc đường thẳng a : $A \notin a$*
- *Điểm A thuộc mp (P) : $A \in$ mp (P)*
- *Điểm A không thuộc mp (P) : $A \notin$ mp (P).*

2. Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

a) *Có một và chỉ một đường thẳng qua hai điểm phân biệt cho trước.*

(Vậy qua hai điểm phân biệt A, B xác định duy nhất một đường thẳng. Đường thẳng đó kí hiệu là AB)

b) *Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.*

(Ba điểm không thẳng hàng A, B, C xác định duy nhất một mặt phẳng. Mặt phẳng đó kí hiệu : (ABC)).

c) *Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.*

(Có những điểm thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó đồng phẳng, còn nếu không có mặt phẳng nào chứa những điểm đó thì ta nói những điểm đó không đồng phẳng. Vậy thừa nhận c).

Có thể phát biểu : "Tồn tại bốn điểm không đồng phẳng"

d) *Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.*

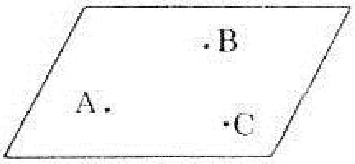
(Giả sử (P) và (Q) là hai mặt phẳng phân biệt có điểm chung A thì (P) và (Q) có đường thẳng chung duy nhất a đi qua A. Đường thẳng a đó gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Kí hiệu : $a = (P) \cap (Q)$)

e) *Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.*

3. Định lí

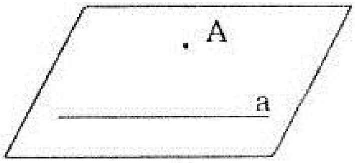
Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì đường thẳng nằm trên mặt phẳng đó.

4. Điều kiện xác định của mặt phẳng



mp (ABC)

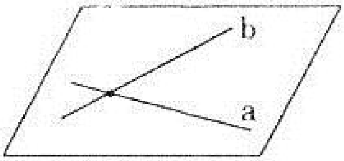
- *Qua ba điểm không thẳng hàng.*



mp (a, A)

- *Qua một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó.*

- *Qua hai đường thẳng cắt nhau.*

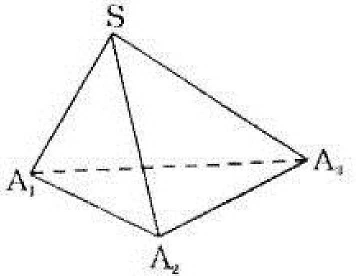


mp (a, b)

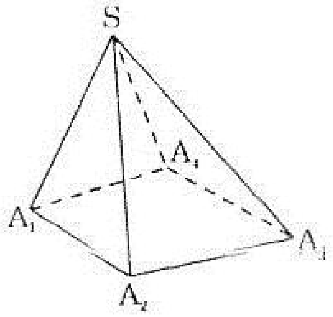
5. Hình chóp và hình tứ diện

Cho đa giác $A_1A_2...A_n$ và điểm S nằm ngoài mặt phẳng (P) chứa đa giác. Nối S với các đỉnh A_1, A_2, ..., A_n ta được n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1.

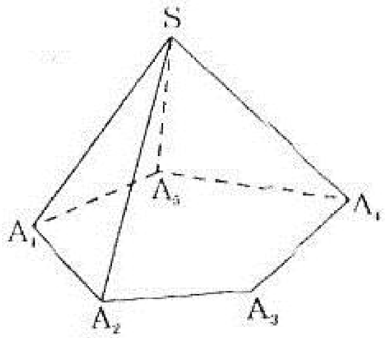
Định nghĩa : *Hình gồm n tam giác đó và đa giác $A_1A_2...A_n$ được gọi là hình chóp và được kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.*



Hình chóp tam giác $S.A_1A_2A_3$ (hay còn gọi là tứ diện $SA_1A_2A_3$)



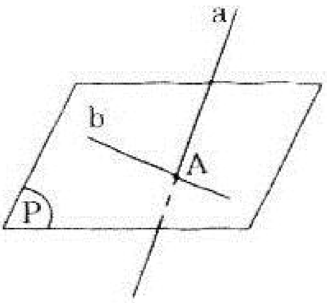
Hình chóp tứ giác $S.A_1A_2A_3A_4$



Hình chóp ngũ giác $S.A_1A_2A_3A_4A_5$

CHỦ ĐỀ 1. – Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng
– Xác định giao tuyến hai mặt phẳng

> * *Để xác định giao điểm của đường thẳng a và mp (P), ta thực hiện như sau :*
>
> – *Tìm đường thẳng $b \subset (P)$ sao cho a cắt b tại A.*
>
> – *Chứng minh $A = a \cap mp\ (P)$.*

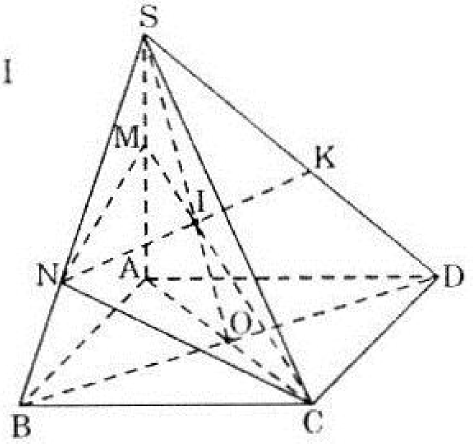


- *Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng ta chỉ cần tìm hai điểm chung A và B của chúng và kết luận giao tuyến hai mặt phẳng đó là đường thẳng AB.*

Bài 1. Cho hình bình hành ABCD nằm trong mp (P) và một điểm S nằm ngoài mp (P). Gọi M là điểm nằm giữa S và A, N là điểm nằm giữa S và B; O là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD.

1. Tìm giao điểm của đường thẳng SO và mp (CMN).
2. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (CMN).

Giải



1. Ta có : $\left.\begin{aligned} &SO;\, CM \subset (SAC) \\ \text{mà}\quad &SO \nparallel CM \end{aligned}\right\} \Rightarrow SO \cap CM = I$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in SO \\ I \in CM \text{ mà } CM \subset (CMN) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in SO \\ I \in (CMN) \end{cases}$$

Vậy SO cắt (CMN) tại I.

2. Ta có : $NI \subset (SBD)$

$\left.\begin{aligned} \Rightarrow\ &NI;\, SD \subset (SBD) \\ \text{mà}\quad &NI \nparallel SD \end{aligned}\right\} \Rightarrow NI \cap SD = K$

$$\Rightarrow \begin{cases} K \in SD \text{ mà } SD \subset (SAD) \Rightarrow K \in (SAD) \\ K \in NI \text{ mà } NI \subset (CMN) \Rightarrow K \in (CMN) \end{cases}$$

⇒ K là điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (CMN) và hiển nhiên M là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAD) và (CMN).

Vậy : $(SAD) \cap (CMN) = KM$.

- ***Chú ý :*** *Để chứng minh hai đường thẳng cắt nhau, ta chứng minh hai đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng và ở vị trí không song song nhau.*

Bài 2. Cho tứ diện S.ABC, trên ba cạnh SA, SB và SC của tứ diện ta lấy ba điểm I, J và K sao cho IK không song song với AC, JK không song song với BC.

1. Xác định giao điểm của :
   - IK và (ABC)
   - JK và (ABC)
2. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (IJK) và (ABC).

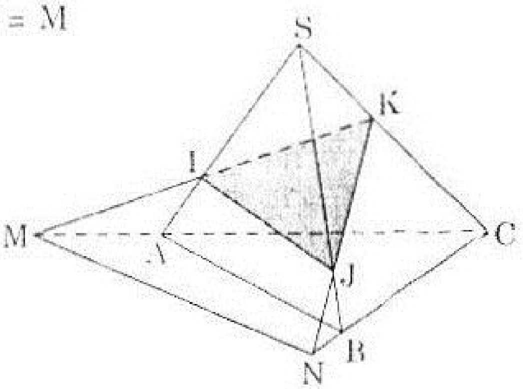
Giải

1.*
$$\left.\begin{array}{ll}\text{Ta có :} & IK;\ AC \subset (SAC)\\ \text{và} & IK \nparallel AC\end{array}\right\} \Rightarrow IK \cap AC = M$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M \in IK \\ M \in AC;\ AC \subset (ABC)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M \in IK \\ M \in (ABC)\end{cases}$$

$$\Rightarrow M = IK \cap (ABC).$$



*
$$\left.\begin{array}{ll}\text{Ta có :} & KJ;\ BC \subset (SBC)\\ \text{và có} & KJ \nparallel BC\end{array}\right\} \Rightarrow KJ \cap BC = N$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N \in KJ \\ N \in BC;\ BC \subset (ABC)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N \in KJ \\ N \in (ABC)\end{cases} \Rightarrow N = KJ \cap (ABC).$$

2. Theo câu 1, ta có :

- $M = IK \cap (ABC) \Rightarrow \begin{cases} M \in IK,\ IK \subset (IJK) \\ M \in (ABC)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \in (IJK) \\ M \in (ABC)\end{cases}$

  $\Rightarrow M \in (IJK) \cap (ABC)$ (a)
- $N = KJ \cap (ABC)$, lập luận tương tự có : $N \in (IJK) \cap (ABC)$ (b)

  Từ (a) và (b) ta có : $MN = (IJK) \cap (ABC)$.

Bài 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$.

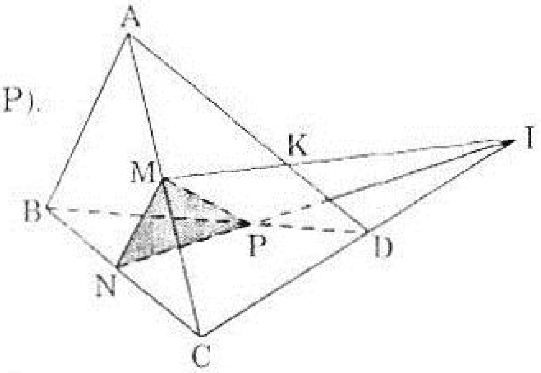
1. Tìm giao điểm của đường thẳng CD với mp (MNP).
2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ABD).

Giải

1.
$$\left.\begin{array}{ll}\text{Ta có :} & NP;\ CD \subset (BCD)\\ \text{và có} & NP \nparallel CD\end{array}\right\} \Rightarrow NP \cap CD = I$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in CD \\ I \in NP;\ NP \subset (MNP)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in CD \\ I \in (MNP)\end{cases} \Rightarrow I = CD \cap (MNP).$$



2. Ta có : $I \in CD;\ CD \subset (ACD)$

$$\Rightarrow I \in (ACD)$$

$$\Rightarrow MI \subset (ACD)$$

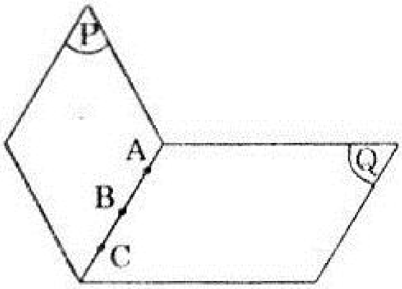
$$\left.\begin{array}{ll}\text{Vậy} & AD;\ MI \subset (ACD)\\ \text{và} & AD \nparallel MI\end{array}\right\} \Rightarrow AD \cap MI = K$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K \in MI;\ MI \subset (MNP) \Rightarrow K \in (MNP) \\ K \in AD;\ AD \subset (ABD) \Rightarrow K \in (ABD) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow K \in (MNP) \cap (ABD) \\ \text{Dễ thấy } P \in (MNP) \cap (ABD) \end{array}\right\} \Rightarrow KP = (MNP) \cap (ABD).$$

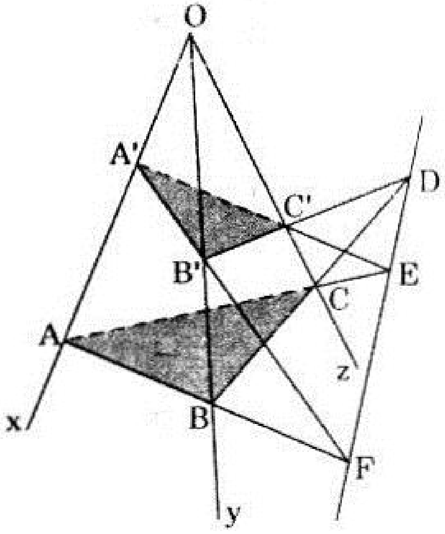
CHỦ ĐỀ 2. Chứng minh nhiều điểm trong không gian thẳng hàng

> *Để chứng minh nhiều điểm (từ ba điểm trở lên) trong không gian thẳng hàng, ta chứng minh các điểm đó nằm trên hai mặt phẳng phân biệt. (Tức các điểm đó nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng đó).*



Bài 4. Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng. Trên tia Ox lấy các điểm A và A'; trên tia Oy lấy các điểm B và B'; trên tia Oz lấy các điểm C và C'. Giả sử BC cắt B'C' tại D; CA cắt C'A' tại E; AB cắt A'B' tại F. Chứng minh các điểm D, E, F thẳng hàng.

Giải



Ta có : $D = BC \cap B'C'$

$$\Rightarrow \begin{cases} D \in BC;\ BC \subset (ABC) \Rightarrow D \in (ABC) \\ D \in B'C';\ B'C' \subset (A'B'C') \Rightarrow D \in (A'B'C') \end{cases}$$

$\Rightarrow D \in (ABC) \cap (A'B'C')$ (a)

Chứng minh tương tự, ta có :

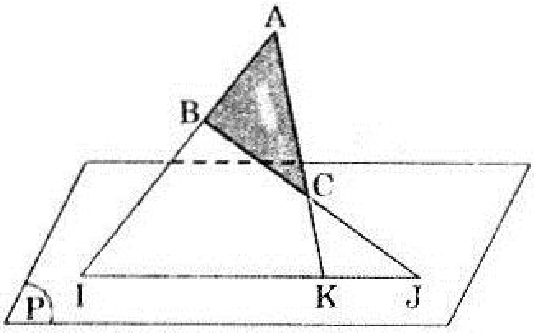
$E \in (ABC) \cap (A'B'C')$ (b)

$F \in (ABC) \cap (A'B'C')$ (c)

Từ (a), (b) và (c) suy ra : D, E, F nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (A'B'C') hay D, E, F thẳng hàng.

Bài 5. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và nằm ngoài mp (P). Giả sử các đường thẳng AB, BC và CA cắt mp (P) lần lượt tại ba điểm I, J và K. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Giải



Ta có : $AB \cap (P) = I$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in AB;\ AB \subset (ABC) \\ I \in (P) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in (ABC) \\ I \in (P) \end{cases} \Rightarrow I \in (ABC) \cap (P)$$

Chứng minh tương tự : $J \in (ABC) \cap (P)$

$K \in (ABC) \cap (P)$

Vậy I, J và K nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (P).

Vậy I, J và K thẳng hàng.

CHỦ ĐỀ 3. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy

Gọi ba đường thẳng đó là a, b và c.

* **Cách 1 :**

- *Tìm giao điểm của hai đường thẳng, giả sử ta tìm được $I = a \cap b$.*
- *Chứng minh c qua I.*

* **Cách 2 :**

- *Chứng minh ba đường thẳng đó không cùng nằm trên một mặt phẳng.*
- *Chứng minh ba đường thẳng đó đôi một cắt nhau.*

Bài 6. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AC và BF thỏa điều kiện : $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$.

Chứng minh rằng ba đường thẳng AB, DM, EN đồng quy.

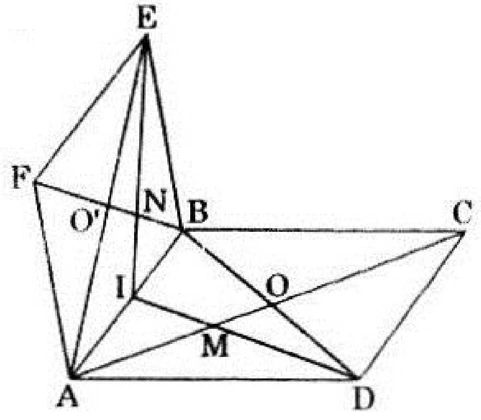
Giải

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow$ O là trung điểm AC và BD.

$O' = AE \cap BF \Rightarrow$ O' là trung điểm BF và AE.

$$\text{Ta có : } \frac{AM}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AM}{2AO} = \frac{1}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{AM}{AO} = \dfrac{2}{3} \\ \text{Mà AO là trung tuyến } \Delta ABD \end{array}\right\} \Rightarrow \text{M là trọng tâm } \Delta ABD.$$



Vậy DM cắt AB tại trung điểm I của AB. (a)

Chứng minh tương tự ta cũng có N là trọng tâm ΔABE nên EN cắt AB tại trung điểm I của AB. (b)

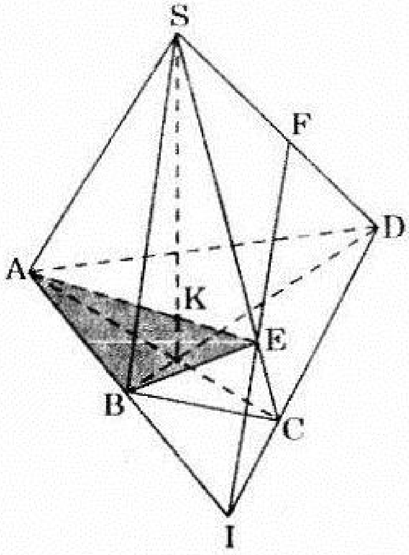
Từ (a) và (b) suy ra AB, DM, EN đồng quy tại I.

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD, trên cạnh SC lấy điểm E (E không trùng với S và C).

1. Tìm giao điểm F của đường thẳng SD và mp (ABE).
2. Giả sử AB không song song với CD. Chứng minh ba đường thẳng AB, CD và EF đồng quy.

Giải

1. Gọi $O = AC \cap BD$



Ta có : $SO, AE \subset (SAC) \Rightarrow SO \cap AE = K$

Ta có : $BK, SD \subset (SBD)$

Suy ra : $BK \cap SD = F$

$$\Rightarrow \begin{cases} F \in BK;\ BK \subset (ABE) \\ F \in SD \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F \in (ABE) \\ F \in SD \end{cases} \Rightarrow F = SD \cap (ABE).$$

2. Gọi $I = AB \cap CD$

Ta có : $E \in (ABE) \cap (SCD)$

$F \in (ABE) \cap (SCD)$

$$\Rightarrow EF = (ABE) \cap (SCD) \quad \text{(a)}$$

Và vì : $I = AB \cap CD$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in AB;\ AB \subset (ABE) \\ I \in CD;\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (ABE) \\ I \in (SCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I \in (ABE) \cap (SCD) \quad \text{(b)}$$

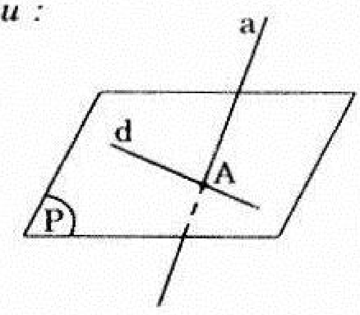
Từ (a) và (b) suy ra **EF** qua I.

Vậy ba đường thẳng AB, CD và EF đồng quy.

CHỦ ĐỀ 4. – Chứng minh đường thẳng lưu động qua một điểm cố định – Tập hợp giao điểm của hai đường thẳng lưu động

* *Cho đường thẳng d lưu động trong một mặt phẳng cố định (P). Ta tìm điểm cố định đường thẳng d đi qua như sau :*

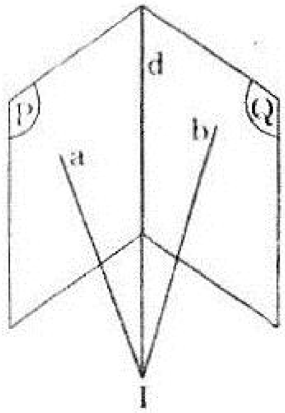
- *Tìm một đường thẳng cố định a : $a \cap d = A$.*
- *Ta chứng minh A cố định.*
- *Kết luận d qua A cố định.*



* *Tìm tập hợp giao điểm I của hai đường thẳng lưu động a và b ta thực hiện như sau :*

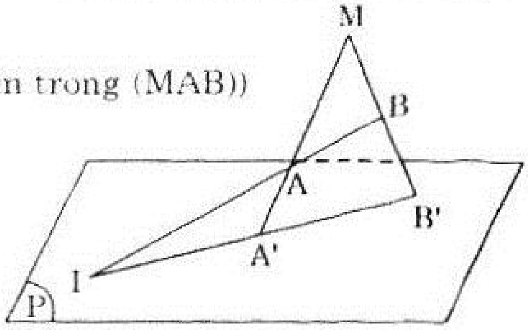
- *Tìm xem a và b lần lượt lưu động trên hai mặt phẳng cố định nào ?*

  Giả sử $\begin{cases} a \subset (P) \\ b \subset (Q) \end{cases}$
- *Xác định* $d = (P) \cap (Q)$.
- *Chứng minh* $I \in d$ *cố định.*
- *Giới hạn (nếu có) và sau đó kết luận tập hợp của điểm I.*



Bài 8. Cho hai điểm cố định A, B nằm ngoài mặt phẳng cố định (P) sao cho AB không song song với (P). M là điểm lưu động trong không gian sao cho MA cắt (P) tại A'; MB cắt (P) tại B'. Chứng minh đường thẳng A'B' đi qua một điểm cố định.

Giải



Gọi $I = AB \cap A'B'$ (vì AB, A'B' cùng nằm trong (MAB))

$\Rightarrow \begin{cases} I \in AB \\ I \in A'B';\ A'B' \subset (P) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} I \in AB \\ I \in (P) \end{cases}$

$\Rightarrow I = AB \cap (P)$, mà AB cố định, (P) cố định.

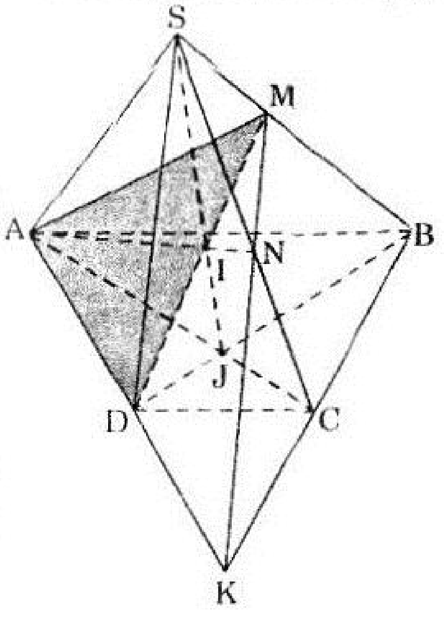
Suy ra I cố định.

Vậy A'B' đi qua một điểm cố định là I.

Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD có M là điểm di động trên SB.

1. Xác định giao điểm N của SC và mp (ADM).
2. Tìm tập hợp giao điểm I của đường thẳng AN và DM.

Giải



1. Gọi $K = AD \cap BC \Rightarrow KM;\ SC \subset (SBC)$

   $\Rightarrow KM \cap SC = N$

   $\Rightarrow \begin{cases} N \in SC \\ N \in KM;\ KM \subset (ADM) \end{cases}$

   $\Rightarrow \begin{cases} N \in SC \\ N \in (ADM) \end{cases} \Rightarrow N = SC \cap (ADM).$

2. Ta có : $I = AN \cap DM$

   $\Rightarrow \begin{cases} I \in AN;\ AN \subset (SAC) \\ I \in DM;\ DM \subset (SDB) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (SAC) \\ I \in (SDB) \end{cases}$

   $\Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD).$

Mặt khác, ta có : $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (a)

và gọi $J = AC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} J \in AC;\ AC \subset (SAC) \\ J \in BD;\ BD \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow J \in (SAC) \cap (SBD)$ (b)

Từ (a) và (b) cho ta : $SJ = (SAC) \cap (SBD)$.

Vậy I thuộc đường thẳng SJ.

Giới hạn :
- M tiến về B thì N tiến về C và I tiến về J.
- M tiến về S thì N tiến về S và I tiến về S.

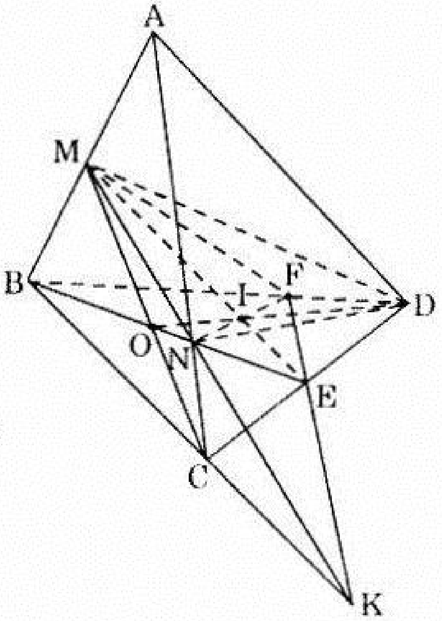
Kết luận : Vậy tập hợp điểm I là đoạn SJ.

(*Chú ý :* Trong chứng minh trên ta đã bỏ qua phần đảo của tập hợp).

Bài 10. Cho tứ diện ABCD, hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AB và AC sao cho : $\dfrac{AM}{AB} \neq \dfrac{AN}{AC}$. Một mặt phẳng (P) thay đổi luôn qua MN cắt CD và BD lần lượt tại E và F.

1. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.
2. Tìm tập hợp giao điểm I của ME và NF.
3. Tìm tập hợp giao điểm J của MF và NE.

Giải



1. Gọi $K = MN \cap BC$ (vì $MN, BC \subset (ABC)$)

$\Rightarrow$ K cố định (vì MN và BC cố định)

Ta lại có : $EF = (P) \cap (BCD)$ (a)

Và vì : $K = MN \cap BC$

$\Rightarrow \begin{cases} K \in MN;\ MN \subset (P) \\ K \in BC;\ BC \subset (BCD) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} K \in (P) \\ K \in (BCD) \end{cases} \Rightarrow K \in (P) \cap (BCD)$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra EF qua điểm K cố định.

2. Ta có : $I = ME \cap NF$

$\Rightarrow \begin{cases} I \in ME;\ ME \subset (MCD) \\ I \in NF;\ NF \subset (NBD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (MCD) \\ I \in (NBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (MCD) \cap (NBD)$

Mặt khác, ta lại có : $D \in (MCD) \cap (NBD)$ (c)

Và gọi $O = CM \cap BN$ (vì $CM, BN \subset (ABC)$)

$\Rightarrow \begin{cases} O \in CM;\ CM \subset (CDM) \\ O \in BN;\ BN \subset (NBD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O \in (CDM) \\ O \in (NBD) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in (MCD) \cap (NBD)$ (d)

Từ (c) và (d) cho ta được : OD = (MCD) ∩ (NBD), OD cố định.

Vậy I thuộc đường thẳng OD.

Giới hạn :
- Khi E tiến về C thì F tiến về B và I tiến về O.
- Khi E tiến về D thì F tiến về D và I tiến về D.

Vậy tập hợp điểm I là đoạn thẳng OD.

3. Lập luận tương tự như câu 2, ta được tập hợp điểm J là đường thẳng AD (bỏ đi các điểm bên trong đoạn AD).

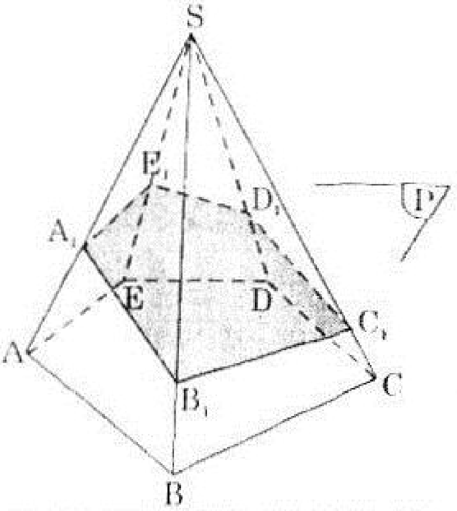
CHỦ ĐỀ 5. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi một mặt phẳng

Khái niệm

Cho hình chóp (S) và một mp (P). Ta nói : thiết diện (hay mặt cắt) của (S) khi cắt bởi mp (P) là phần chung của (P) và (S).

Xác định thiết diện

Xác định thiết diện của (S) khi cắt bởi mp (P) chính là xác định giao điểm của mp (P) với các cạnh (cạnh bên, cạnh đáy) của (S).



Bài 11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M là điểm nằm giữa hai điểm C và B; N là điểm nằm giữa hai điểm C và D; P là điểm nằm giữa hai điểm S và A. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mp (MNP).

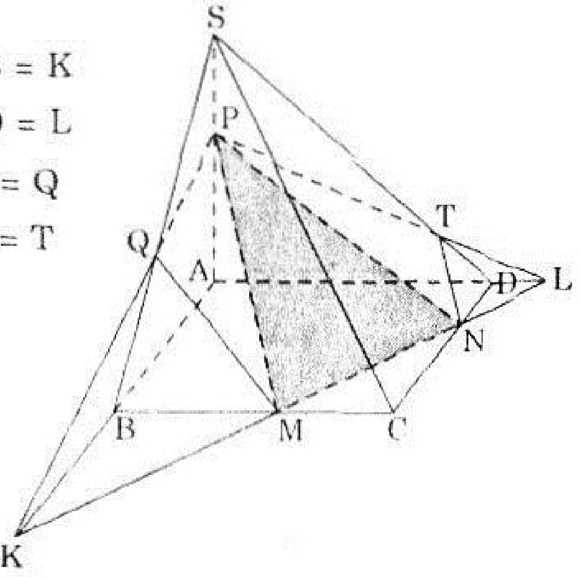
Giải

- Trong mp (ABCD), ta có : MN ∩ AB = K
  MN ∩ AD = L
- Trong mp (SAB), ta có : KP ∩ SB = Q
- Trong mp (SAD), ta có : PL ∩ SD = T

Từ đó ta có :

(SAB) ∩ (MNP) = QP
(SBC) ∩ (MNP) = QM
(SCD) ∩ (MNP) = TN
(SAD) ∩ (MNP) = PT

Và (ABCD) ∩ (MNP) = MN

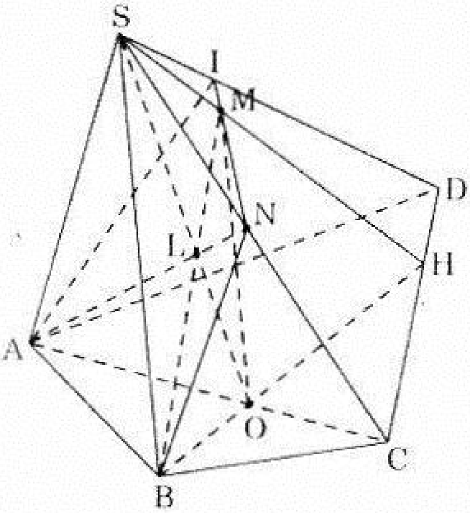


Vậy : Thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mp (MNP) là một ngũ giác MNTPQ.

Bài 12. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M là một điểm trong của tam giác SCD.

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC).
2. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp (ABM).

Giải



1. Trong mp (SCD), ta có :

$$SM \cap CD = H$$

$$\Rightarrow BH;\ AC \subset (ABCD)$$

Gọi $O = AC \cap BH$

$$\Rightarrow \begin{cases} O \in BH;\ BH \subset (SBM) \\ O \in AC;\ AC \subset (SAC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} O \in (SBM) \\ O \in (SAC) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow O \in (SBM) \cap (SAC) \\ \text{Và có : } S \in (SBM) \cap (SAC) \end{array}\right\} \Rightarrow SO = (SBM) \cap (SAC).$$

2. Trong mp (SBM), ta có : $SO \cap BM = L \Rightarrow AL;\ SC \subset (SAC)$

Gọi $AL \cap SC = N$

Trong mp (SCD), ta có : $MN \cap SD = I$

Vậy : $(ABM) \cap (ABCD) = AB$

$(ABM) \cap (SBC) = BN$

$(ABM) \cap (SCD) = NI$

$(ABM) \cap (SAD) = AI$

Suy ra thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mp (ABM) là một tứ giác ABNI.

BÀI TẬP TỔNG HỢP. Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng

Bài 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi M là trung điểm AB và K là trọng tâm ΔACD.

1. Tìm giao điểm H của đường thẳng MK và mp (BCD). Chứng minh K là trọng tâm của tam giác ABH.
2. Trên cạnh BC lấy điểm N (N không trùng B, C).
   - Tìm giao điểm P của CD và mp (MNK).
   - Tìm giao điểm Q của AD và mp (MNK).
3. Chứng minh rằng ba đường thẳng MQ, NP và BD đồng quy.

Bài 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, BC. Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho BK = 2KD.

1. Tìm giao điểm E của đường thẳng CD và mp (IJK).

   Chứng minh rằng : DE = DC.

2. Tìm giao điểm F của đường thẳng AD và mp (IJK).

   Chứng minh rằng : FA = 2FD.

3. Chứng minh rằng : FK // IJ.

4. Gọi M là điểm nằm giữa A và B, N là điểm nằm giữa C và D. Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mp (IJK).

Bài 3. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và SC.

1. Xác định giao điểm I và J của mp (SBD) theo thứ tự đó với các đường thẳng AN và MN.

2. Tính các tỉ số : $\frac{IA}{IN}$; $\frac{JM}{JN}$ và $\frac{IB}{IJ}$.

Bài 4. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, K theo thứ tự là hai điểm trong của các tam giác ABC và BCD. Giả sử đường thẳng IK cắt mp (ACD) tại J. Hãy xác định điểm J.

Bài 5. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm tam giác ACD; M, N, P lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, AC, AD sao cho :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NA} = \frac{PD}{PA} = \frac{1}{2}$$

Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng MN và BC và J là giao điểm của hai đường thẳng MP và BD.

1. Chứng minh rằng các đường thẳng MG, PI, NJ đồng phẳng.

2. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của CD, NI; H là giao điểm của MG với BE; K là giao điểm của GF với mp (BCD). Chứng minh rằng các điểm H, K, I, J thẳng hàng.

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với AB // CD; AB > CD. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SB và SC.

1. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

2. Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mp (AIJ).

3. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mp (AIJ).

Bài 7. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Kéo dài BC một đoạn CE = a kéo dài BD một đoạn DF = a. Gọi M là trung điểm của đoạn AB.

1. Tìm thiết diện của tứ diện cắt bởi mp (MEF).

2. Tính diện tích thiết diện đó theo a.

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm cạnh SB, G là trọng tâm của tam giác SAD.

1. Tìm giao điểm I của đường thẳng GM và mp (ABCD). Chứng minh đường thẳng CD nằm trên mp (CGM).
2. Chứng minh mp (CGM) đi qua trung điểm của đoạn SA.
3. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (CGM).

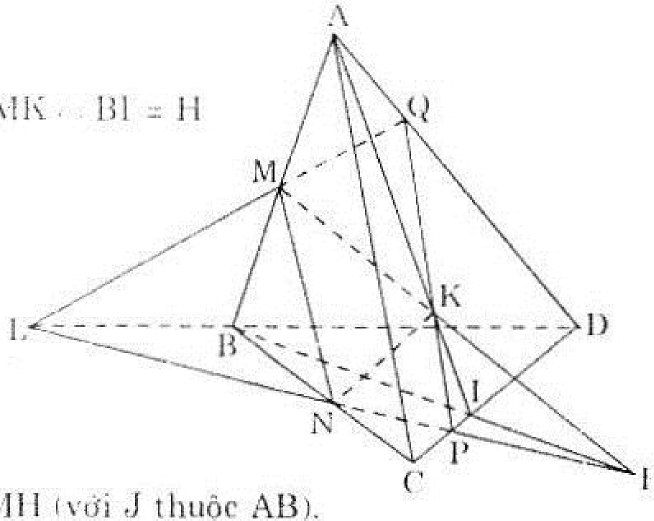
Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD (với AB // CD). M là điểm di động trên cạnh SB.

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ADM) và (SBC).
2. Tìm giao điểm của đường thẳng SC và mp (ADM).
3. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AN và DM. Chứng minh điểm I chạy trên một đường thẳng cố định khi M di động trên cạnh SB.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

1.• Gọi I là trung điểm cạnh CD ⇒ K thuộc đoạn AI và $AK = \frac{2}{3}AI$ (do K là trọng tâm ΔACD).



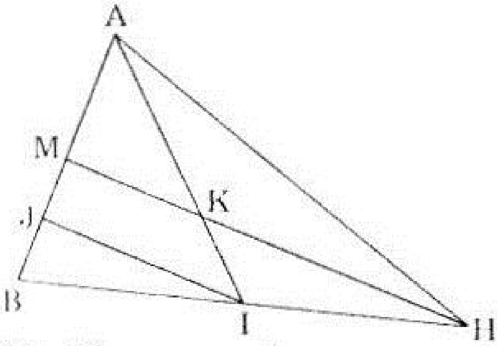
$$\left.\begin{aligned} &\text{Ta có : } MK;\ BI \subset (ABI) \\ &\text{và } \frac{AM}{AB} \neq \frac{AK}{AI} \end{aligned}\right\} \Rightarrow MK \cap BI = H$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H \in MK \\ H \in BI;\ BI \subset (BCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H \in MK \\ H \in (BCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow H = MK \cap (BCD)$.

• Trong mp (ABH), từ I vẽ IJ // MH (với J thuộc AB).



$$\left.\begin{aligned} &\text{Vì } AK = 2KI \Rightarrow AM = 2MJ \\ &\qquad\quad \text{mà } AM = BM \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow BM = 2MJ \Rightarrow \text{J là trung điểm BM} \\ &\qquad \text{Mà } IJ \text{ // } MK \text{ (do cách dựng)} \end{aligned}\right\}$$

⇒ I là trung điểm BH.

⇒ AI là trung tuyến ΔABH.

Và có MH là trung tuyến ΔABH; $AI \cap MH = K$

⇒ K là trọng tâm ΔABH.

2.• Ta có : MH; CD ⊂ (BCD), suy ra : $NH \cap CD = P$

$$\Rightarrow \begin{cases} P \in CD \\ P \in NH;\ NH \subset (MNK) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P \in CD \\ P \in (MNK) \end{cases} \Rightarrow P = CD \cap (MNK).$$

- Trong mp (ACD), ta có : $KP \cap AD = Q$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q \in AD \\ Q \in KP;\ KP \subset (MNK) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q \in AD \\ Q \in (MNK) \end{cases} \Rightarrow Q = AD \cap (MNK).$$

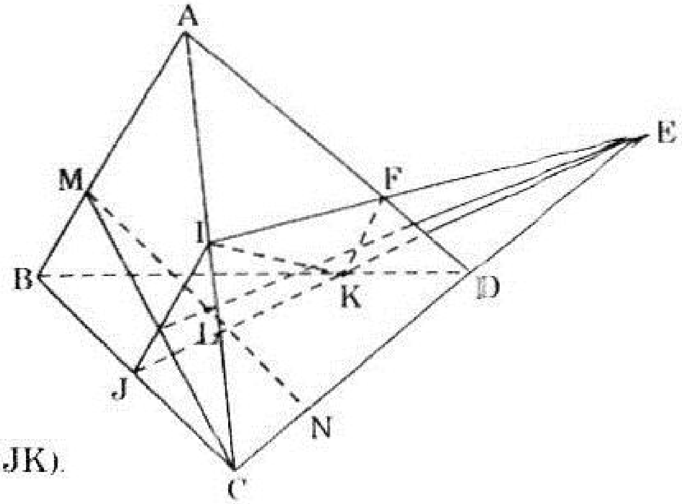
3. Trong mp (MNK), ta có : $MQ \cap NP = L$

$$\Rightarrow \begin{cases} L \in MQ;\ MQ \subset (ABD) \\ L \in NP;\ NP \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L \in (ABD) \\ L \in (BCD) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow L \in (ABD) \cap (BCD) \\ \text{Mà : } (ABD) \cap (BCD) = BD \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \text{BD qua điểm L} \\ \text{Mà } L = MQ \cap NP \end{array}\right\} \Rightarrow \text{MQ, NP và BD đồng quy tại I.}$$

Bài 2.



1. Ta có : $\left.\begin{array}{l} JK, CD \subset (BCD) \\ \text{và } \dfrac{BK}{KD} \neq \dfrac{BJ}{JC} \end{array}\right\}$

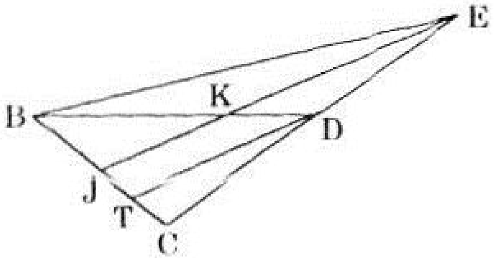
$\Rightarrow JK \cap CD = E$

$$\Rightarrow \begin{cases} E \in CD \\ E \in JK;\ JK \subset (IJK) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E \in CD \\ E \in (IJK) \end{cases} \Rightarrow E = CD \cap (IJK).$$

- Trong mp (BCD), vẽ DT // EJ (với $T \in BC$)

$$\left.\begin{array}{r} \text{Mà } BK = 2KD \Rightarrow BJ = 2JT \\ \text{Mà } \quad BJ = JC \end{array}\right\} \Rightarrow JC = 2JT$$



$\Rightarrow$ T là trung điểm JC.

$\Rightarrow$ D là trung điểm CE (do TD là đường trung bình của ΔJCE).

$\Rightarrow DE = DC$.

2. - Trong mp (ACD), ta có : $IE \cap AD = F$

$$\Rightarrow \begin{cases} F \in AD \\ F \in IE;\ IE \subset (IJK) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F \in AD \\ F \in (IJK) \end{cases} \Rightarrow F = AD \cap (IJK).$$

- Xét ΔACE có :

$$\left.\begin{array}{l} \text{EI, AD là 2 đường trung tuyến} \\ F = EI \cap AD \end{array}\right\} \Rightarrow \text{F là trọng tâm } \Delta ACE \Rightarrow AF = 2FD.$$

3. ΔBCE có : EJ, BD là hai đường trung tuyến và $BD \cap EJ = K$

$\Rightarrow$ K là trọng tâm tam giác BCE $\Rightarrow \dfrac{EK}{KJ} = 2$ (a)

Ta cũng có F là trọng tâm $\Delta ACE \Rightarrow \frac{EF}{FI} = 2$ (b)

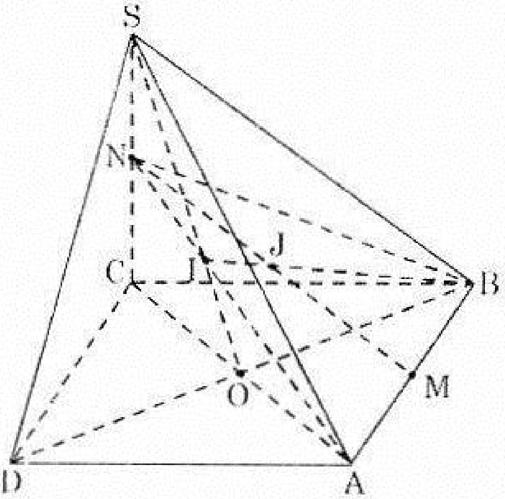
Từ (a) và (b) cho : $\frac{EK}{KJ} = \frac{EF}{FI} \Rightarrow FK \parallel IJ$.

4. Trong mp (ABC), $MC \cap IJ = Q \Rightarrow EQ, MN \subset (MCD)$

$\Rightarrow EQ \cap MN = L$

$$\Rightarrow \begin{cases} L \in MN \\ L \in EQ;\ EQ \subset (IJK) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L \in MN \\ L \in (IJK) \end{cases} \Rightarrow L = MN \cap (IJK).$$

Bài 3.



1. • Gọi $O = AC \cap BD$

Trong mp (SAC), ta có : $SO \cap AN = I$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in AN \\ I \in SO;\ SO \subset mp\,(SBD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in AN \\ I \in mp\,(SBD) \end{cases}$$

$\Rightarrow I = AN \cap mp\,(SBD)$

- Ta có : $MN; BI \subset m\ (ANB)$

nên $MN \cap BI = J$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in MN \\ J \in BI;\ BI \subset mp\,(SBD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J \in MN \\ J \in mp\,(SBD) \end{cases} \Rightarrow J = MN \cap mp\,(SBD).$$

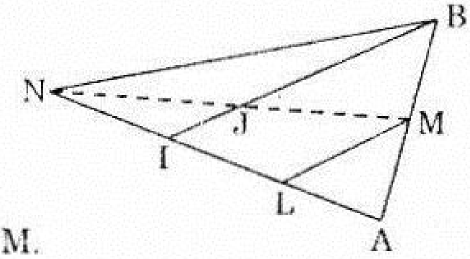
2. • Ta có : AN và SO lần lượt là hai trung tuyến của tam giác SAC

mà $SO \cap AN = I \Rightarrow$ I là trọng tâm tam giác SAC $\Rightarrow \frac{IA}{IN} = 2$.

- Trong mp (ANB), từ M vẽ $ML \parallel IB$ (với $L \in AN$).

Mà M là trung điểm AB $\Rightarrow$ ML là đường trung bình của ΔAIB

$\Rightarrow$ L là trung điểm AI $\Rightarrow IL = \frac{1}{2}IA$



Lại có : $IN = \frac{1}{2}IA$ (do $\frac{AI}{IN} = 2$)

Suy ra : $IL = IN \Rightarrow$ I là trung điểm NL
mà $IJ \parallel LM$

$\Rightarrow$ IJ là đường trung bình của tam giác NLM.

$\Rightarrow$ J là trung điểm MN $\Rightarrow \frac{JM}{JN} = 1$.

- Ta có : IJ là đường trung bình của tam giác NLM $\Rightarrow IJ = \frac{1}{2}LM$

Mặt khác : LM là đường trung bình của ΔABI $\Rightarrow LM = \frac{1}{2}IB$

Vậy ta có : $IJ = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}IB\right) = \frac{IB}{4} \Rightarrow \frac{IB}{IJ} = 4.$

Bài 4. Trong mp (BCD), ta có : $BK \cap CD = N$

Trong mp (ABC), ta có : $BI \cap AC = M$

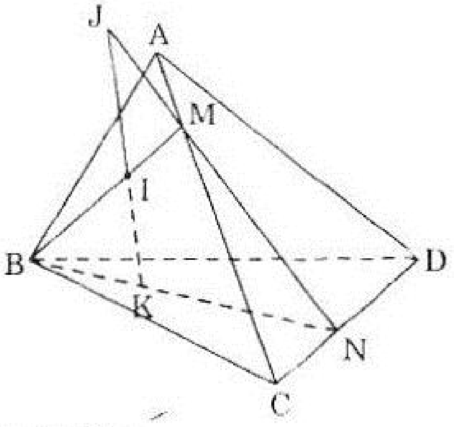
Suy ra : $MN \subset (ACD)$

Mặt khác : $IK; MN \subset (BIK)$

nên ta có : $IK \cap MN = J$

$$\Rightarrow \begin{cases} J \in IK \\ J \in MN;\ MN \subset mp(ACD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} J \in IK \\ J \in mp(ACD) \end{cases} \Rightarrow J = IK \cap mp(ACD).$$



Bài 5.

1. Gọi E là trung điểm CD

$\Rightarrow G \in AE$

Ta có : $JN; IP \subset mp(MNP)$

Ta chứng minh $MG \subset mp(MNP)$

Thật vậy, ta có :

$$\frac{NC}{NA} = \frac{EG}{GA} = \frac{1}{2}$$

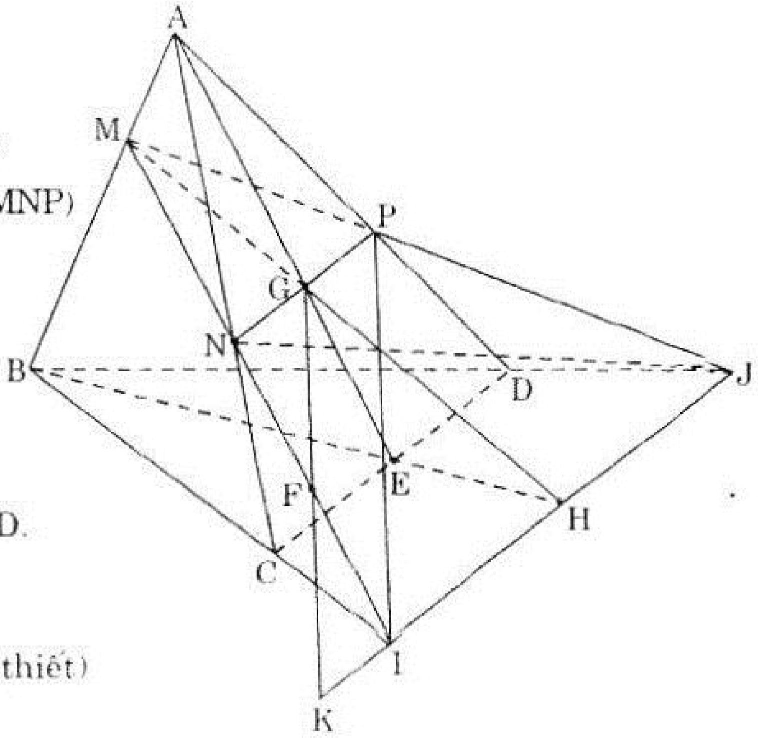
(do giả thiết và G là trọng tâm ΔACD)

$\Rightarrow NG \parallel CE$ hay $NG \parallel CD$.

Ta lại có :

$$\frac{EG}{GA} = \frac{PD}{PA} = \frac{1}{2} \text{ (do giả thiết)}$$

$\Rightarrow GP \parallel ED$ hay $GP \parallel CD$.



Trong mp (ACD) có NG và GP cùng song song với CD

$\Rightarrow$ N, G và P thẳng hàng.

$\Rightarrow G \in NP$ mà $NP \subset mp(MNP)$.

$\Rightarrow G \in mp(MNP)$ hay $MG \subset mp(MNP)$.

Vậy ba đường thẳng MG, PI và JN đồng phẳng.

2. Dễ thấy : $IJ = mp(MNP) \cap mp(BCD)$ (a)

Mặt khác : $H = MG \cap BE$

$$\Rightarrow \begin{cases} H \in MG;\ MG \subset mp\,(MNP) \\ H \in BE;\ BE \subset mp\,(BCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H \in mp\,(MNP) \\ H \in mp\,(BCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow H \in mp\,(MNP) \cap mp\,(BCD) \qquad \text{(b)}$$

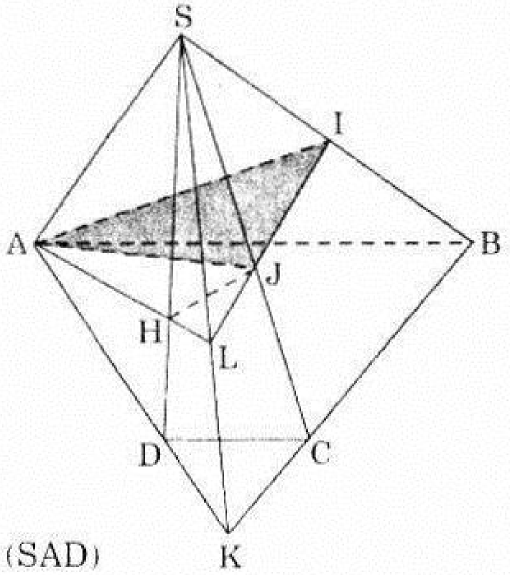
Và lại có : $K = GF \cap mp\,(BCD)$

$$\Rightarrow \begin{cases} K \in GF;\ GF \subset mp\,(MNP) \\ K \in mp\,(BCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K \in mp\,(MNP) \\ K \in mp\,(BCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow K \in mp\,(MNP) \cap mp\,(BCD) \qquad \text{(c)}$$

Từ (a), (b) và (c) suy ra $H, K \in IJ$ hay bốn điểm I, J, K, H thẳng hàng.

Bài 6.



1. Gọi $K = AD \cap BC$

$$\Rightarrow \begin{cases} K \in AD;\ AD \subset mp\,(SAD) \\ K \in BC;\ BC \subset mp\,(SBC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K \in mp\,(SAD) \\ K \in mp\,(SBC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow K \in mp\,(SAD) \cap mp\,(SBC)$$

Và có : $S \in mp\,(SAD) \cap mp\,(SBC)$

$$\Rightarrow SK = mp\,(SAD) \cap mp\,(SBC).$$

2. Trong mp (SBC), ta có : $IJ \cap SK = L$

$$\Rightarrow L \in SK,\ SK \subset mp\,(SAD) \Rightarrow L \in mp\,(SAD)$$

$\Rightarrow AL, SD \subset mp\,(SAD)$ nên $AL \cap SD = H$

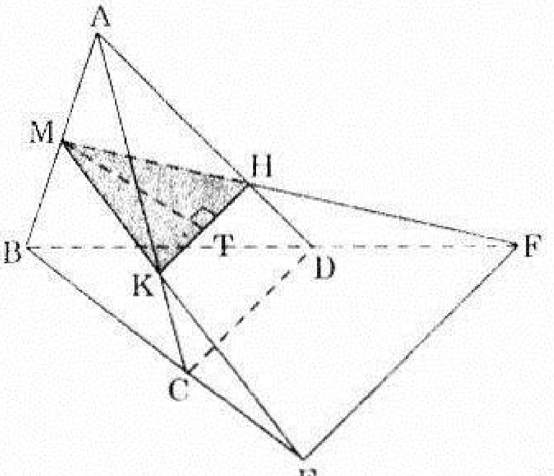
$$\Rightarrow \begin{cases} H \in SD \\ H \in AL;\ AL \subset mp\,(AIJ) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H \in SD \\ H \in mp\,(AIJ) \end{cases} \Rightarrow H = SD \cap mp\,(AIJ).$$

3. Ta có :

$$mp\,(AIJ) \cap mp\,(SAD) = AH$$
$$mp\,(AIJ) \cap mp\,(SDC) = HL$$
$$mp\,(AIJ) \cap mp\,(SBC) = IJ$$
$$mp\,(AIJ) \cap mp\,(SAB) = AI$$

Nên thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mp (AIJ) là tứ giác AHJI.

Bài 7.



1. Trong mp (ABC), ta có :

$$ME \cap AC = K$$

Trong mp (SBD), ta có :

$$MF \cap SD = H$$

Vậy ta có thiết diện của tứ diện cắt bởi mp (MEF) là tam giác MKH.

2. Ta có CM, AC là trung tuyến của tam giác ABE.

Mà $AC \cap CM = K \Rightarrow K$ là trọng tâm $\Delta ABE \Rightarrow AK = \frac{2}{3}AC = \frac{2a}{3}$

Chứng minh tương tự : $AH = \frac{2a}{3}$

Vậy : $\frac{AK}{AC} = \frac{AH}{AD} = \frac{\frac{2a}{3}}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow KH \parallel CD$

$\Rightarrow \Delta AKH \backsim \Delta ACD$
Mà ΔACD là tam giác đều $\Big\} \Rightarrow \Delta AKH$ cũng là tam giác đều.

$\Rightarrow KH = AK = \frac{2a}{3}$.

Xét ΔAMK có :

$$MK^2 = MA^2 + KA^2 - 2MA.KA.\cos\hat{A}$$
$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - 2.\frac{a}{2}.\frac{2a}{3}.\cos60^0 = \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{9} - \frac{2a^2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{13a^2}{36}$$

$\Rightarrow MK = \frac{a\sqrt{13}}{6}$, tương tự : $MH = \frac{a\sqrt{13}}{6} \Rightarrow \Delta MKH$ cân tại M.

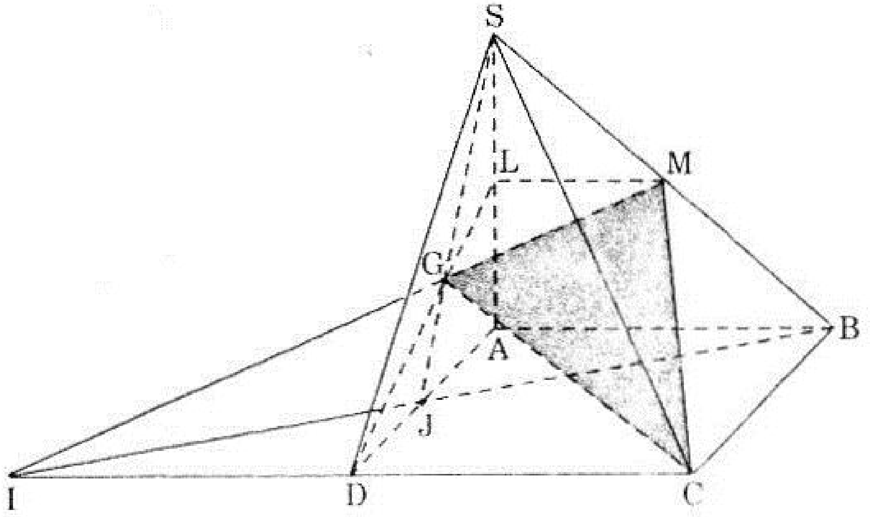
Gọi T là trung điểm $KH \Rightarrow MT \perp KT$

hay ΔMTK vuông tại T nên có :

$$MT = \sqrt{MK^2 - KT^2} = \sqrt{\frac{13a^2}{36} - \frac{a^2}{9}} \quad \left(\text{do } KT = \frac{KH}{2} = \frac{a}{3}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{9a^2}{36}} = \frac{a}{2}$$

Vậy diện tích tam giác MKH là : $S = \frac{1}{2}MT.KH = \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{2a}{3} = \frac{a^2}{6}$.

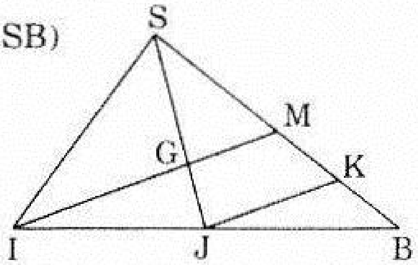
Bài 8.



1 • Gọi J là trung điểm AD $\Rightarrow$ G thuộc đoạn SJ.

Trong mp (SJB), ta có : $GM \cap JB = I$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in GM \\ I \in JB;\ JB \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in GM \\ I \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow I = GM \cap (ABCD).$$



• Trong mp (SIB), từ J vẽ JK // IM (với K thuộc SB)

Mà $SG = 2GJ$ (do G là trọng tâm ΔSAD)

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow\ SM = 2MK \\ \text{mà}\ \ SM = MB \end{array}\right\} \Rightarrow MB = 2MK$$

$\Rightarrow$ K là trung điểm MB.

$\Rightarrow$ J là trung điểm IB $\Rightarrow IJ = JB$

Vậy : $\Delta AJB = \Delta DJI$ (c.g.c)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \Rightarrow\ \widehat{ABJ} = \widehat{JID} \\ \text{mà hai góc đó ở vị trí so le trong} \end{array}\right\} \Rightarrow ID \,//\, AB \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{mặt khác :}\quad DC \,//\, AB \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ I, D và C thẳng hàng hay $CD \subset$ mp (CGM).

2.• $$\left.\begin{array}{l} \text{Gọi } L = DG \cap SA \\ \text{Mà G là trọng tâm } \Delta SAD \end{array}\right\} \Rightarrow \text{L là trung điểm SA.}$$

Mà $DG \subset (CGM) \Rightarrow (CGM)$ qua trung điểm L của SA.

• Ta có : $DC = (CGM) \cap (SDC)$

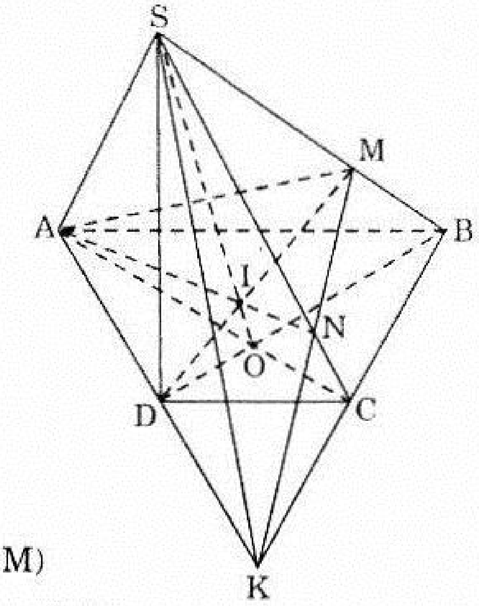
$CM = (CGM) \cap (SBC)$

$ML = (CGM) \cap (SAB)$

$LD = (CGM) \cap (SAD)$

$\Rightarrow$ Thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mp (CGM) là tứ giác DCML.

Bài 9.



1. Gọi $K = AD \cap BC$

$$\Rightarrow \begin{cases} K \in AD;\ AD \subset (SAD) \\ K \in BC;\ BC \subset (SBC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K \in (SAD) \\ K \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow K \in (SAD) \cap (SBC)$$

Mặt khác có : $S \in (SAD) \cap (SBC)$

$\Rightarrow SK = (SAD) \cap (SBC)$.

2. Trong mp (SBC), ta có : $KM \cap SC = N$

$$\Rightarrow \begin{cases} N \in SC \\ N \in KM;\ KM \subset (ADM) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N \in SC \\ N \in (ADM) \end{cases}$$

$\Rightarrow N = SC \cap (ADM)$.

3.• Ta có : $I = AN \cap DM$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in AN;\ AN \subset (SAC) \\ I \in DM;\ DM \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (SAC) \\ I \in (SBD) \end{cases}$$

$\Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD)$ (với mp (SAC) và mp (SBD) cố định).

- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Gọi $O = AC \cap BD$

$$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC;\ AC \subset (SAC) \\ O \in BD;\ BD \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD) \\ \text{Mặt khác : } S \in (SAC) \cap (SBD) \end{array}\right\} \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$$

Vậy I chạy trên đường thẳng cố định SO.

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

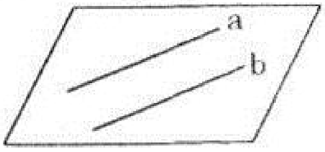
B. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1. Nhận xét

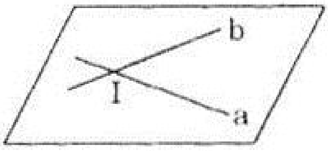
Cho hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian, ta có hai khả năng xảy ra :

a) Không có mặt phẳng nào chứa cả a và b. Ta nói : a và b chéo nhau.

b) Có mặt phẳng chứa cả a và b. Ta nói : a và b đồng phẳng. Lúc đó ta lại có các trường hợp sau xảy ra :



a // b ($a \cap b = \varnothing$)



a và b cắt nhau

2. Định nghĩa

- *Hai đường thẳng gọi là chéo nhau nếu chúng không cùng nằm trong một mặt phẳng.*
- *Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung. Kí hiệu : a // b.*

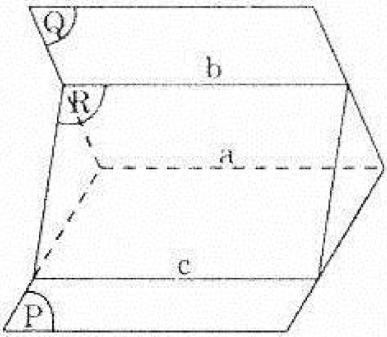
Vậy : $a \parallel b \overset{dn}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a, b \subset mp(\alpha) \\ a \cap b = \varnothing \end{cases}$

3. Hai đường thẳng song song

- ***Tính chất 1 :*** *Trong không gian, qua một điểm ngoài một đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.*
- ***Tính chất 2 :*** *Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.*

Vậy : $$\left.\begin{array}{l} a, b \text{ phân biệt} \\ a \,//\, c \text{ và } b \,//\, c \end{array}\right\} \Rightarrow a \,//\, b$$

- ***Định lí :*** *Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.*



Vậy :

$$\left.\begin{array}{l} (P) \cap (Q) = a \\ (Q) \cap (R) = b \\ (R) \cap (P) = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a, b, c \text{ đồng quy} \\ a, b, c \text{ đôi một song song.} \end{array}\right.$$

Hệ quả : *Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.*

Vậy : $$\left.\begin{array}{l} a \,//\, b \\ a \subset (P);\ b \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c \,//\, a \,//\, b \\ c \equiv a \vee c \equiv b \end{array}\right.$$

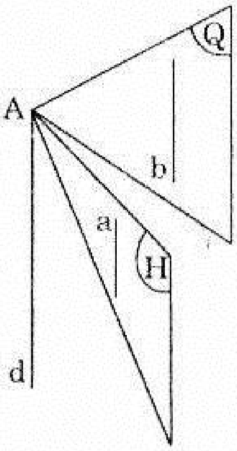
CHỦ ĐỀ 6. – Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (có yếu tố song song)
– Chứng minh hai đường thẳng song song

* *Xác định giao tuyến hai mặt phẳng (P) và (Q) ta thực hiện :*

- *Tìm A ∈ (P) ∩ (Q)*
- *Xác định phương của giao tuyến dựa vào hệ quả (trong phần tóm tắt lí thuyết).*

* *Để chứng minh hai đường thẳng a và b song song ta có thể dùng các cách sau :*

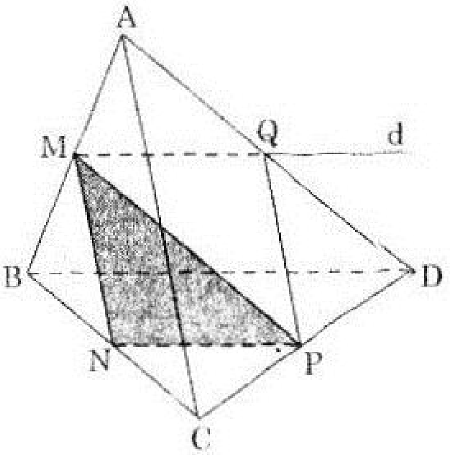
- *Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba.*
- *Dựa vào hệ quả.*
- *Phối hợp hai cách trên.*



Bài 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC và CD.

1. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ABD).
2. Xác định giao điểm Q của đường thẳng AD và mặt phẳng (MNP). Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là một hình bình hành.

Giải



1. Ta có : $M \in (MNP) \cap (ABD)$
   và $NP \,//\, BD$ (tính chất đường trung bình)
   $NP \subset (MNP)$
   $BD \subset (ABD)$

   $\Rightarrow (MNP) \cap (ABD) = d$

   với $d \,//\, BD \,//\, NP$ và d qua M.

2. • Trong mp (ABD), ta có : $d \cap AD = Q$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q \in AD \\ Q \in d;\ d \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q \in AD \\ Q \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q = AD \cap (MNP).$$

- Ta có : $MQ \,//\, BD$

$$MQ = \frac{BD}{2} \text{ (do MQ là đường trung bình của } \Delta ABD)$$

Tương tự NP là đường trung bình của ΔBCD, nên có :

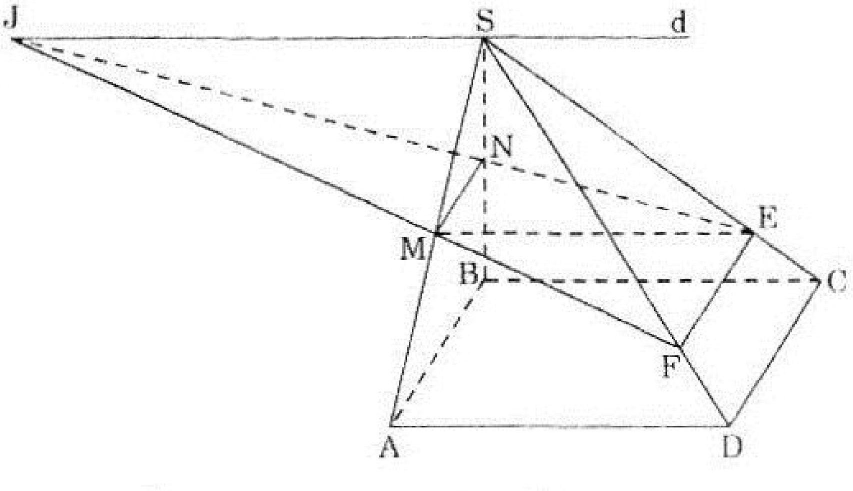
$$NP \,//\, BD \text{ và } NP = \frac{BD}{2}$$

Vậy có : $MQ \,//\, NP$ và $MQ = NP$ $\Rightarrow$ MNPQ là hình bình hành.

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật.

1. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).
2. Gọi M là trung điểm của SA, N là trung điểm của SB, E là điểm nằm giữa S và C sao cho $\frac{SE}{SC} = \frac{2}{3}$. Mặt phẳng (MNE) cắt SD tại F. Chứng minh rằng tứ giác MNEF là hình thang.
3. Gọi J là giao điểm của MF và NE. Chứng minh điểm J chạy trên một đường thẳng cố định khi điểm E thay đổi trên cạnh SC.

Giải



1. Ta có : $S \in (SBC) \cap (SAD)$ và $BC \,//\, AD$

$BC \subset (SBC)$; $AD \subset (SAD)$

$\Rightarrow (SBC) \cap (SAD) = d$ với $d \parallel BC \parallel AD$ và d qua S.

2. Ta có: $MN \parallel AB$ (vì MN là đường trung bình của ΔSAB)

$AB \parallel CD$ (vì ABCD là hình chữ nhật)

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow MN \parallel CD. \\ \text{Ta lại có}: MN \subset (MNF), \quad CD \subset (SCD) \\ \text{và } (MNF) \cap (SCD) = EF \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel DC \parallel EF$$

$\Rightarrow$ MNEF là hình thang.

3. Ta có: $J = MF \cap NE \Rightarrow \begin{cases} J \in MF;\ MF \subset (SAD) \\ J \in NE; \in NE \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J \in (SAD) \\ J \in (SBC) \end{cases}$

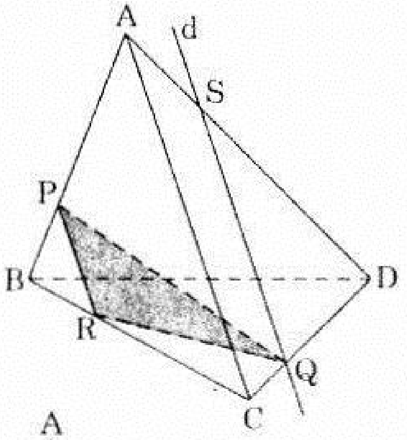
$\Rightarrow J \in (SAD) \cap (SBC) = d$ (d cố định)

Vậy J chạy trên đường thẳng cố định d khi E thay đổi trên cạnh SC.

Bài 3. Cho tứ diện ABCD và ba điểm P, Q, R lần lượt nằm trên ba cạnh AB, CD, BC. Hãy xác định giao điểm S của mp (PQR) với cạnh AD nếu:

1. $PR \parallel AC$
2. PR cắt AC.

Giải



1. Xét $PR \parallel AC$.

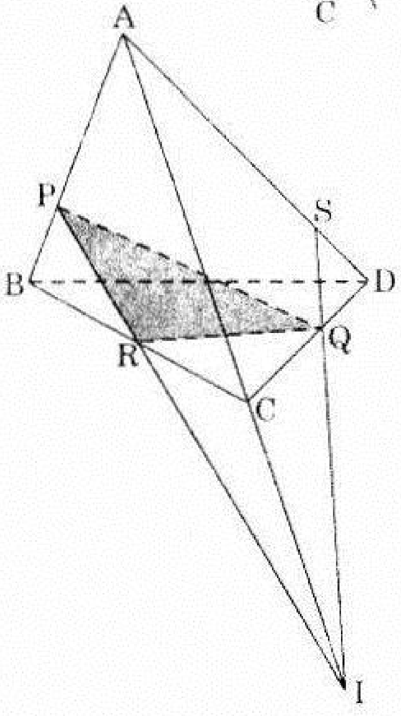
$$\left.\begin{array}{l} \text{Ta có}: Q \in (ACD) \cap (PQR) \\ PR \parallel AC \\ PR \subset (PQR); \quad AC \subset (ACD) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow (PQR) \cap (ACD) = d$

với $d \parallel AC \parallel PR$ và d qua Q.

Trong mp (ACD), ta có $d \cap AD = S$

$\Rightarrow \begin{cases} S \in AD \\ S \in (PQR) \end{cases} \Rightarrow S = AD \cap (PQR).$



2. Xét PR cắt AC.

Gọi $I = PR \cap AC$

$\Rightarrow I \in PR,\ PR \subset (PQR)$

$\Rightarrow I \in (PQR) \Rightarrow IQ \subset (PQR)$.

Trong mp (ACD), ta có: $QI \cap AD = S$

$\Rightarrow \begin{cases} S \in AD \\ S \in QI,\ QI \subset (PQR) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S \in AD \\ S \in (PQR) \end{cases}$

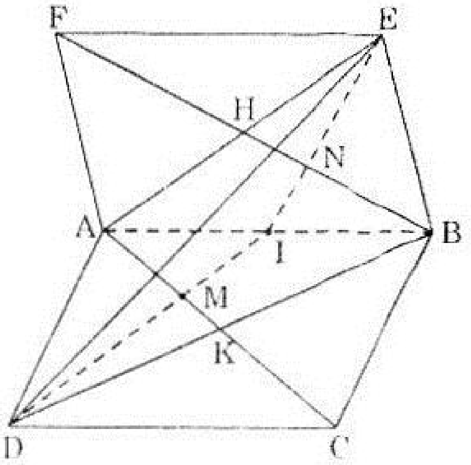
$\Rightarrow S = AD \cap (PQR).$

Bài 4. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên hai đường chéo AC và BF lấy điểm M và N sao cho :

$$\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}.$$

1. Chứng minh rằng DM, EN và AB đồng quy.
2. Chứng minh rằng : MN // DE.

Giải



1. Gọi $K = AC \cap BD$; $H = AE \cap BF$

$\Rightarrow$ K là trung điểm AC và BD

và H là trung điểm AE và BF.

Ta có $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{AM}{2AK} = \dfrac{1}{3}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{AM}{AK} = \dfrac{2}{3} \\ \text{mà AK là trung tuyến } \Delta ABD \end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ M là trọng tâm ΔABD.

$\Rightarrow$ DM cắt AB tại trung điểm I của AB.

Chứng minh tương tự : N là trọng tâm $\Delta ABE \Rightarrow$ EN cắt AB tại trung điểm I của AB.

Vậy AB, DM và EN đồng quy tại I với I là trung điểm đoạn AB.

2. $\dfrac{IN}{IE} = \dfrac{IM}{ID} \Rightarrow$ MN // DE.

TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho tứ diện ABCD; P, Q lần lượt là trung điểm AB và CD; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho BR = 2RC. Gọi S là giao điểm của mp (PQR) và cạnh AD. Chứng minh rằng : AS = 2SD.

Bài 6. Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD.

1. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua G và một đỉnh của tứ diện sẽ đi qua trọng tâm của mặt đối diện với đỉnh ấy.
2. Gọi A' là trọng tâm của mặt BCD. Chứng minh rằng : GA = 3A'G.

Chú ý : Ba đoạn thẳng nối từ trung điểm của các cặp cạnh đối của một tứ diện đồng quy tại trung điểm của mỗi đường; điểm đó gọi là trọng tâm của tứ diện đó.

Bài 7. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có AD cắt BC. Hãy tìm điểm M nằm trên cạnh SD và điểm N nằm trên cạnh SC sao cho AM // BM.

Bài 8. Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BC và BD; E là một điểm thuộc cạnh AD khác với A và D.

1. Xác định thiết diện của hình tứ diện cắt bởi mp (IJE).
2. Tìm vị trí của E trên AD sao cho thiết diện là hình bình hành.
3. Tìm điều kiện của tứ diện và vị trí điểm E trên cạnh AD để thiết diện là một hình thoi.

Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là một tứ giác lồi. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác SAB và SAD. E là trung điểm của CB.

1. Chứng minh rằng : MN // BD.
2. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi mp (MNE).
3. Gọi H và L lần lượt là các giao điểm của mp (MNE) với các cạnh SB và SD. Chứng minh rằng : LH // BD.

Bài 10. Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng :

1. Các đoạn thẳng đi qua mỗi đỉnh và trọng tâm của mặt đối diện đồng quy tại một điểm G và điểm G chia trong mỗi đoạn thẳng đó theo tỉ lệ 3 : 1 kể từ đỉnh đến trọng tâm của mặt đối diện.
2. Điểm G là trọng tâm của tứ diện ABCD.

Bài 11. Cho tứ diện ABCD và bốn điểm M, N, E và F lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng :

Nếu bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng khi và chỉ khi :

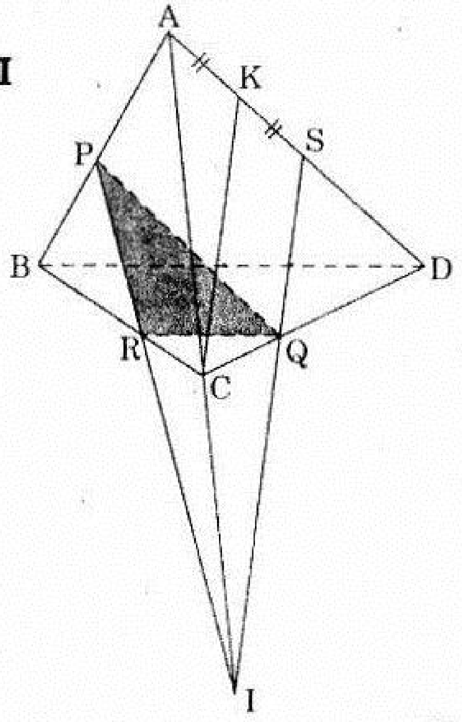
$$\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{EC}{ED}.\frac{FD}{FA}=1.$$

Bài 12. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. M là trung điểm của SC, N là trung điểm của OB với O là giao điểm của BD và AC.

1. Tìm giao điểm I của SD và mp (AMN)
2. Tính tỉ số $\frac{SI}{ID}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 5.



- Trong mp (ABC), ta có :

$PR \cap AC = I$

$\Rightarrow IQ \subset (PRQ)$

Trong mp (SCD), ta có :

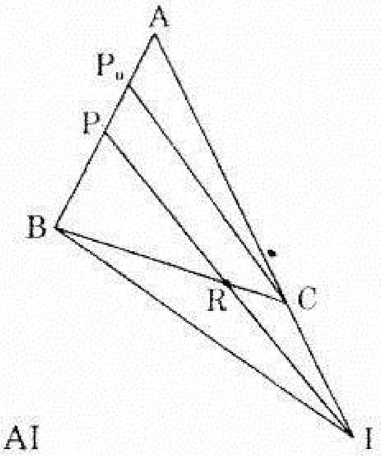
$IQ \cap AD = S$

$$\Rightarrow \begin{cases} S \in AD \\ S \in IQ;\ IQ \subset (PRQ) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S \in AD \\ S \in (PRQ) \end{cases} \Rightarrow S = AD \cap (PRQ).$$

Trong mp (ABC), từ C vẽ $CP_0 \parallel IP$ (với $P_0 \in AB$).

Xét ΔBCP_0 có : $PR \parallel P_0C \Rightarrow \dfrac{BP}{BP_0} = \dfrac{BR}{BC}$



Và có : $\dfrac{BR}{RC} = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{BP}{PP_0} = 2 \Rightarrow BP = 2PP_0 \\ \text{mà } BP = PA \end{array}\right\} \Rightarrow PA = 2PP_0$$

$$\left.\begin{array}{l} P_0 \text{ là trung điểm } AP \\ \text{mà } P_0C \parallel PI \text{ (cách dựng)} \end{array}\right\} \Rightarrow C \text{ là trung điểm } AI$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Vậy } BC \text{ và } IP \text{ là hai trung tuyến của } \Delta ABI \\ \text{mà } BC \cap IP = R \end{array}\right\} \Rightarrow R \text{ là trọng tâm } \Delta ABI$$

- Gọi K là trung điểm của AS $\Rightarrow$ KC là đường trung bình của ΔASI.

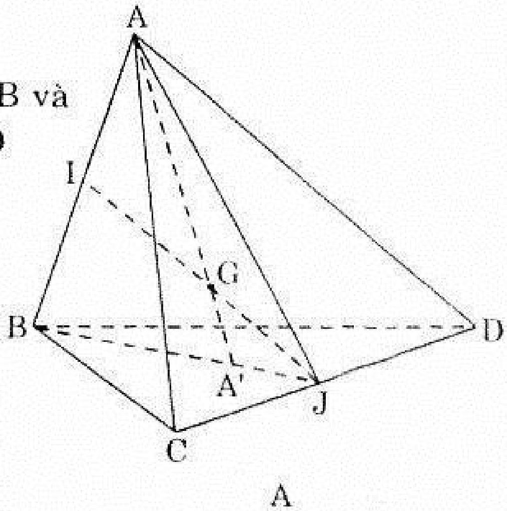
$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow KC \parallel SI \text{ hay } KC \parallel SQ \\ \text{mà } Q \text{ là trung điểm } CD \end{array}\right\} \Rightarrow SQ \text{ là đường trung bình của } \Delta KCD$$

$\Rightarrow$ S là trung điểm KD

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow SD = KS \\ \text{mà } KS = AK \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} SD = KS \\ SD = AK \end{cases} \Rightarrow 2SD = KS + AK \Rightarrow 2SD = AS.$$

Bài 6.

1. Gọi I và J lần lượt là trung điểm cạnh AB và CD, và G là trọng tâm của tứ diện ABCD



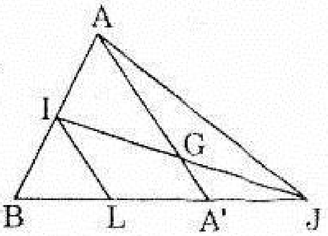
$\Rightarrow$ G là trung điểm IJ.

Trong mp (ABJ), gọi $A' = AG \cap BJ$.

Ta chứng minh A' là trọng tâm ΔBCD.

Gọi L là trung điểm BA'.

$\Rightarrow$ IL là đường trung bình của $\Delta ABA'$



$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow IL \parallel AA' \text{ hay } IL \parallel GA' \\ \text{Mà } G \text{ là trung điểm } IJ \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ GA' là đường trung bình của ΔILJ

$\Rightarrow$ A' là trung điểm LJ

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow A'J = LA' \\ \text{mà } LA' = BL \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A'J = LA' \\ A'J = BL \end{array}\right\} \Rightarrow 2A'J = LA' + BL$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 2A'J = BA' \\ \text{Mà } BJ \text{ là đường trung tuyến } \Delta BCD \end{array}\right\} \Rightarrow A' \text{ là trọng tâm của } \Delta BCD.$$

Chứng minh tương tự cho các đường thẳng đi qua G và các đỉnh còn lại.

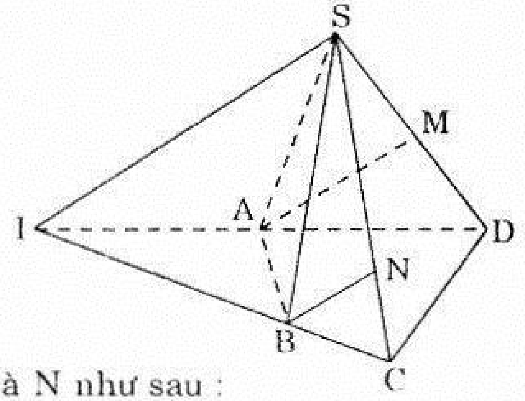
2. Vì GA' là đường trung bình của $\Delta ILJ \Rightarrow GA' = \dfrac{1}{2}IL$

Ta cũng có IL là đường trung bình của $\Delta ABA' \Rightarrow IL = \dfrac{1}{2}AA'$

$$\Rightarrow GA' = \frac{1}{4}AA' \Rightarrow 4GA' = AA' \Rightarrow 3GA' = AA' - GA' \Rightarrow 3GA' = AG.$$

Bài 7. • Giả sử có M thuộc cạnh SD, N thuộc cạnh SC sao cho AM // BN.

Mà $AM \subset (SAD)$, $BN \subset (SBC)$. Nên nếu hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) cắt nhau theo một giao tuyến thì giao tuyến đó song song với AM và BN.



• Từ đó suy ra cách xác định hai điểm M và N như sau :

+ Gọi $I = AD \cap BC$

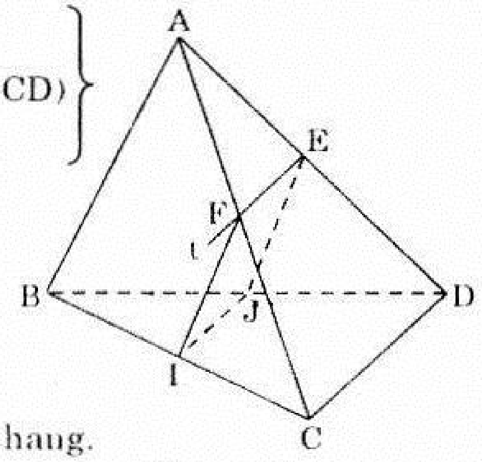
$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \begin{cases} I \in AD;\ AD \subset (SAD) \\ I \in BC;\ BC \subset (SBC) \Rightarrow I \in (SAD) \cap (SBC) \end{cases} \\ \qquad\qquad\qquad \text{và có } S \in (SAD) \cap (SBC) \end{array}\right\} \Rightarrow SI = (SAD) \cap (SBC).$$

+ Trong mp (SAD), từ A vẽ AM // SI với $M \in SD$.

Trong mp (SBC), từ B vẽ BN // SI với $N \in SC$.

+ Khi đó M và N là hai điểm cần xác định.

Bài 8.



1. $\left.\begin{array}{l} \text{Ta có : } E \in (ACD) \cap (IJE) \\ \text{Mà IJ // CD (IJ là đường trung bình của } \Delta BCD) \\ \text{Và } IJ \subset (IJE);\ CD \subset (ACD) \end{array}\right\}$

$\Rightarrow (ACD) \cap (IJE) = Et$ với Et // CD // IJ

Gọi $F = Et \cap AC$ (trong mp (ACD))

Vậy thiết diện nhận được là tứ giác IJEF.

Ta có : Et // IJ $\Rightarrow$ EF // IJ

$\Rightarrow$ Tứ giác IJEF là hình thang.

2. • $\left.\begin{array}{l} \text{Ta có hình thang IJEF là hình bình hành} \Leftrightarrow \text{IF // JE} \\ \text{mà } IF \subset (ABC); JE \subset (ABD) \\ (ABC) \cap (ABD) = AB \end{array}\right\} \Rightarrow$ AB // IF // JE

hay IF và JE là đường trung bình của ΔABC và ΔABD

$\Rightarrow$ E là trung điểm của AD (lúc đó F là trung điểm của AC)

- Ngược lại : E, F lần lượt là trung điểm của AD, AC thì dễ dàng chứng minh được tứ giác IJEF là hình bình hành.

3. Hình thang IJEF là hình thoi $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{IJEF là hình bình hành} \\ IJ = IF\ (*) \end{cases}$

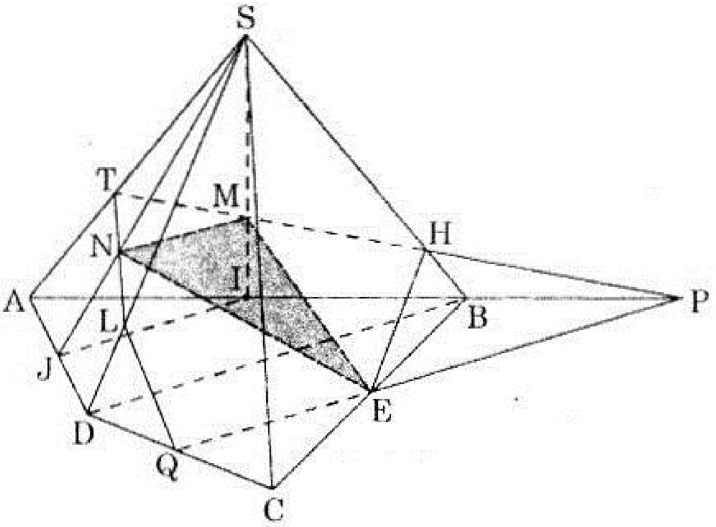
   Ta có IJ là đường trung bình của $\Delta BCD \Rightarrow IJ = \dfrac{1}{2}CD$

   và E là trung điểm AD thì F là trung điểm AC.

   Vậy IF là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow IF = \dfrac{1}{2}AB$

   Do đó : $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{E là trung điểm AD} \\ IJ = IF \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{E là trung điểm của AD} \\ CD = AB. \end{cases}$

Bài 9.



1. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD

   $\Rightarrow$ M và N lần lượt nằm trên SI và SJ.

   Ta có : $\dfrac{SM}{SI} = \dfrac{SN}{SJ} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow MN \parallel IJ$

   Mà IJ là đường trung bình của $\Delta ABD \Rightarrow IJ \parallel BD$

   Vậy suy ra : $MN \parallel BD$.

2. Ta có $\left.\begin{array}{l} E \in (ABCD) \cap (EMN) \\ \text{mà} \quad MN \parallel BD \\ \qquad MN \subset (EMN);\ BD \subset (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (ABCD) \cap (EMN) = Ex \\ \quad \text{với } Ex \parallel MN \parallel BD. \end{array}$

   Trong mp (ABCD), ta có : $Ex \cap AB = P$; $\quad Ex \cap DC = Q$

   Trong mp (SAB), ta có : $MP \cap SB = H$; $\quad MP \cap SA = T$

   Trong mp (SAD), ta có : $TN \cap SD = L$

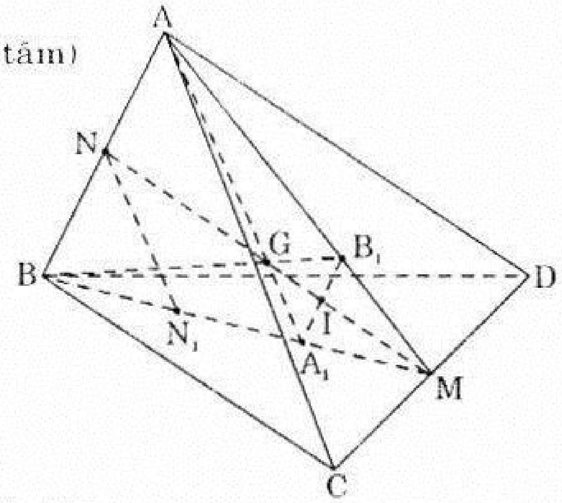
   Vậy thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mp (MNE) là một ngũ giác QEHTL.

3. $$\left.\begin{array}{ll}\text{Ta có :} & LH = (MNE) \cap (SBD)\\ \text{Mà} & MN \,//\, BD\\ & MN \subset (MNE);\ BD \subset (SBD)\end{array}\right\} \Rightarrow LH \,//\, BD \,//\, MN \text{ hay } LH \,//\, BD.$$

Bài 10.

1. Gọi A_1, B_1, C_1 và D_1 lần lượt là trọng tâm của ΔBCD, ΔACD, ΔABD và ΔABC.

Trong mp (ABM), ta có : $AA_1 \cap BB_1 = G$



$$\Rightarrow \frac{A_1M}{BM} = \frac{B_1M}{AM} = \frac{1}{3} \text{ (tính chất trọng tâm)}$$

$\Rightarrow A_1B_1 \,//\, AB$

$$\Rightarrow \frac{GA_1}{GA} = \frac{GB_1}{GB} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{MA_1}{MB} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{GA_1}{GA} = \frac{GB_1}{GB} = \frac{1}{3}$$

Vậy AA_1, BB_1 cắt nhau tại G và G chia trong đoạn AA_1 theo tỉ số 3 : 1.

Lập luận tương tự cho BB_1, CC_1 và CC_1, DD_1.

$\Rightarrow$ Bốn đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 và DD_1 đồng quy tại điểm G và điểm G đó chia trong bốn đoạn trên theo tỉ số 3 : 1.

2. Trong mp (ABM), ta có : $GM \cap AB = N$

Ta chứng minh N là trung điểm của AB và G là trung điểm của MN.

Gọi $I = MN \cap A_1B_1$. Ta có : $A_1B_1 \,//\, AB$ nên có :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{IB_1}{NB} = \dfrac{GB_1}{GB} = \dfrac{1}{3}\\[2mm] \dfrac{IB_1}{NA} = \dfrac{MB_1}{MA} = \dfrac{1}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{IB_1}{NB} = \frac{IB_1}{NA} \Rightarrow NA = NB$$

$\Rightarrow$ N là trung điểm của đoạn AB.

Gọi N_1 là trung điểm của $BA_1 \Rightarrow A_1$ là trung điểm của MN_1.

Ta có : NN_1 là đường trung bình của ΔABA_1

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow NN_1 \,//\, AA_1 \text{ hay } NN_1 \,//\, GA_1\\ \text{mà } A_1 \text{ là trung điểm của } MN_1\end{array}\right\} \Rightarrow GA_1 \text{ là đường trung bình của } \Delta MNN_1.$$

$\Rightarrow$ G là trung điểm của đoạn MN.

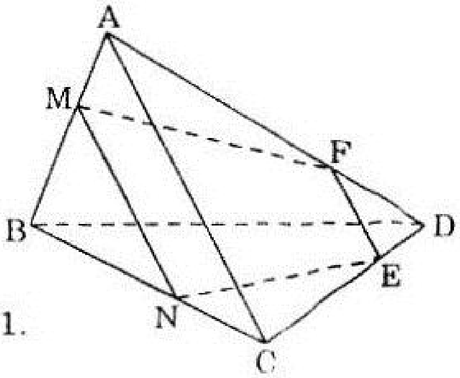
Vậy ta có thể kết luận G là trọng tâm của tứ diện ABCD.

Bài 11. * Giả sử M, N, E, F đồng phẳng, ta chứng minh :

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{FD}{FA} = 1$$

- Xét MN // EF :

Ta có : $\left.\begin{array}{l} MN = (ABC) \cap (MNEF) \\ AC = (ABC) \cap (ACD) \\ EF = (ACD) \cap (MNEF) \\ \text{mà} \quad MN \,//\, EF \end{array}\right\} \Rightarrow MN \,//\, EF \,//\, AC$



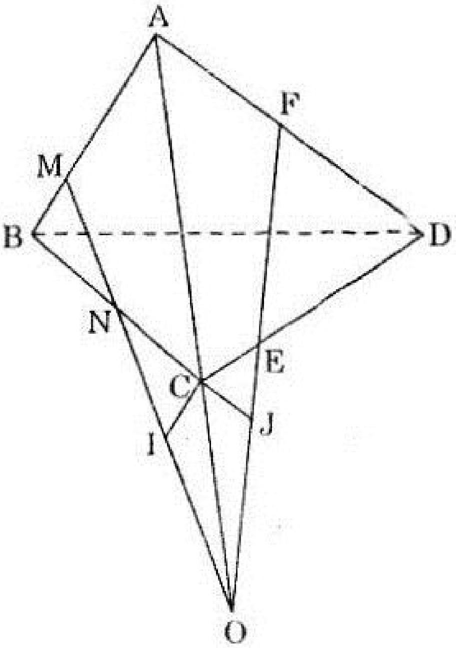
Với MN // AC suy ra : $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{NC}{NB}$

Với EF // AC suy ra : $\dfrac{EC}{ED} = \dfrac{FA}{FD}$

Vậy : $\dfrac{MA}{MB}.\dfrac{NB}{NC}.\dfrac{EC}{ED}.\dfrac{FD}{FA} = \dfrac{NC}{NB}.\dfrac{NB}{NC}.\dfrac{FD}{FA}.\dfrac{FA}{FD} = 1.$

- Xét MN cắt EF :

$\left.\begin{array}{l} \text{Gọi } O = MN \cap EF \\ \text{mà : } MN = (ABC) \cap (MNEF) \\ AC = (ABC) \cap (ACD) \\ EF = (ACD) \cap (MNEF) \end{array}\right\} \Rightarrow$ MN, EF và AC đồng quy tại O.



Từ C kẻ CI // AB với I ∈ MN.

Từ C kẻ CJ // AD với J ∈ EF. Ta có :

$$\frac{NB}{NC} = \frac{MB}{CI} \text{ và } \frac{OC}{OA} = \frac{CI}{MA}$$

$$\frac{EC}{ED} = \frac{CJ}{FD} \text{ và } \frac{OA}{OC} = \frac{AF}{CJ}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{MA}{MB}.\dfrac{NB}{NC}.\dfrac{OC}{OA} = \dfrac{MA}{MB}.\dfrac{MB}{CI}.\dfrac{CI}{MA} = 1 \\ \dfrac{EC}{ED}.\dfrac{FD}{FA}.\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{CJ}{FD}.\dfrac{FD}{FA}.\dfrac{AF}{CJ} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{EC}{ED}.\frac{FD}{FA} = 1.$$

* Giả sử : $\dfrac{MA}{MB}.\dfrac{NB}{NC}.\dfrac{EC}{ED}.\dfrac{FD}{FA} = 1$, ta chứng minh M, N, E, F đồng phẳng

Gọi F' = (MNE) ∩ AD.

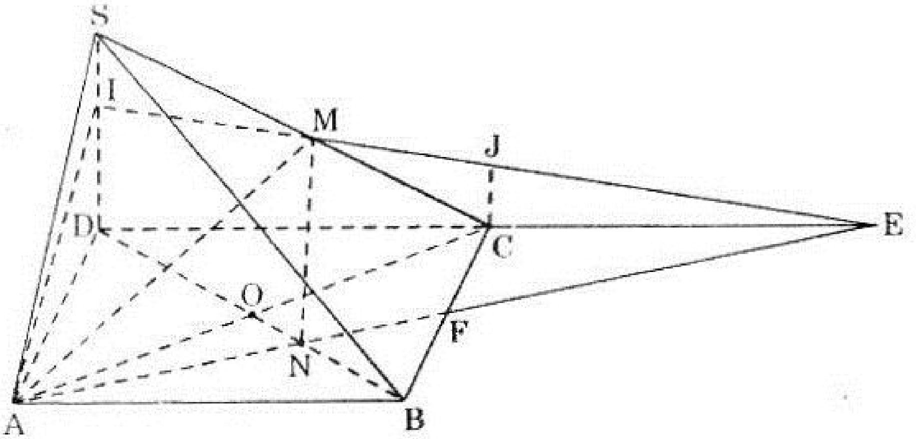
Theo chứng minh trên ta có :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{MA}{MB}.\dfrac{NB}{NC}.\dfrac{EC}{ED}.\dfrac{F'D}{F'A} = 1 \\ \text{mà ta có : } \dfrac{MA}{MB}.\dfrac{NB}{NC}.\dfrac{EC}{ED}.\dfrac{FD}{FA} = 1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \dfrac{F'D}{F'A} = \dfrac{FD}{FA} \\ \text{Mà } F, F' \text{ đều nằm trong đoạn } AD\end{array}\right\} \Rightarrow F \equiv F'$$

$\Rightarrow$ M, N, E và F đồng phẳng.

Bài 12.



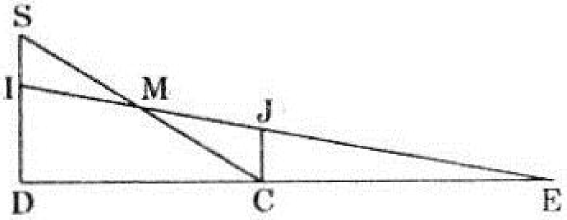
1 Trong mp (ABCD), ta có : $AN \cap DC = E$

Trong mp (SDC), ta có : $EM \cap SD = I$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in SD \\ I \in EM;\ EM \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in SD \\ I \in (AMN) \end{cases}$$

$\Rightarrow I = SD \cap (AMN)$.

2 Gọi $F = AN \cap BC$



Vì : BF // AD $\Rightarrow \dfrac{BF}{AD} = \dfrac{BN}{ND} = \dfrac{1}{3}$

do : $\dfrac{BF}{AD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{CF}{AD} = \dfrac{2}{3}$

Vì : CF // AD $\Rightarrow \dfrac{EC}{ED} = \dfrac{CF}{AD} = \dfrac{2}{3}$

Kẻ CJ // SD với $J \in EI \Rightarrow \dfrac{CJ}{ID} = \dfrac{EC}{ED} = \dfrac{2}{3}$

Mặt khác : JC // SI $\Rightarrow \Delta SIM \backsim \Delta CJM$

Mà tỉ số đồng dạng là $\dfrac{SM}{CM} = 1$ (do M là trung điểm SC)

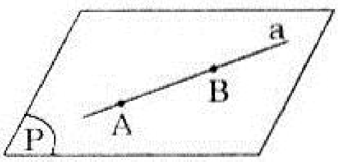
$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \Delta SIM = \Delta CJM \Rightarrow CJ = SI \\ \text{Theo chứng minh trên } \dfrac{CJ}{ID} = \dfrac{2}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{SI}{ID} = \dfrac{2}{3}.$$

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

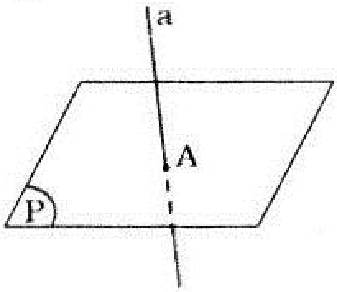
C. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

1. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

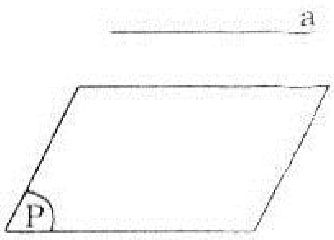
Cho đường thẳng a và mp (P). Ta có :



$a \subset (P)$
(a và (P) có 2 điểm chung phân biệt)



a và (P) cắt nhau
(a và (P) có 1 điểm chung duy nhất)

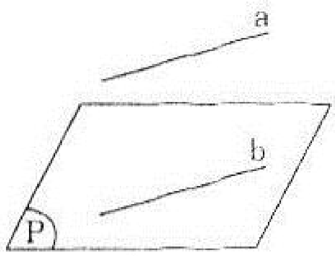


a // mp (P)
(a và (P) không có điểm chung)

Vậy : $a \;//\; mp\,(P) \overset{dn}{\Leftrightarrow} a \cap mp\,(P) = \varnothing$

2. Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng

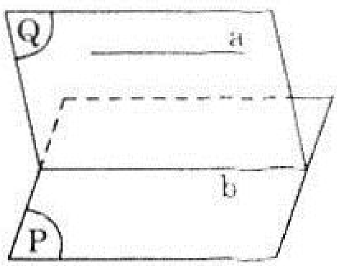
- ***Định lí 1 :*** *Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b nào đó nằm trên mặt phẳng (P) không chứa a thì a song song với mặt phẳng (P).*



Vậy : $\begin{cases} a \text{ không nằm trên } (P) \\ a \;//\; b \text{ với } b \subset mp\,(P) \end{cases} \Rightarrow a \;//\; mp\,(P)$

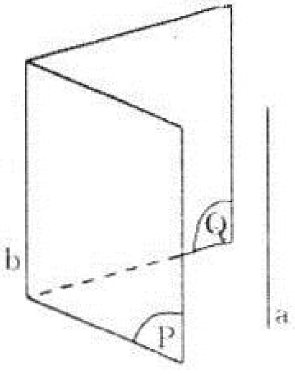
- ***Định lí 2 :*** *Nếu đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó nằm trong mặt phẳng.*

Hệ quả a : *Nếu đường thẳng a song song với mp (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a mà cắt (P) thì cắt (P) theo một giao tuyến song song với a.*



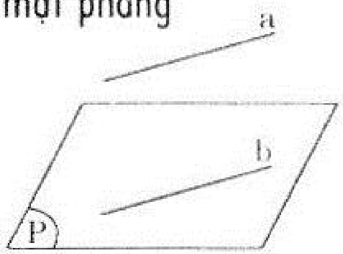
Vậy : $\left.\begin{matrix} a \;//\; (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \;//\; b.$

Hệ quả b : *Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.*



Vậy : $\left.\begin{matrix} (P) \cap (Q) = b \\ a \;//\; (P) \text{ và } a \;//\; (Q) \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \;//\; b.$

CHỦ ĐỀ 7. Chứng minh đường thẳng song song với một mặt phẳng



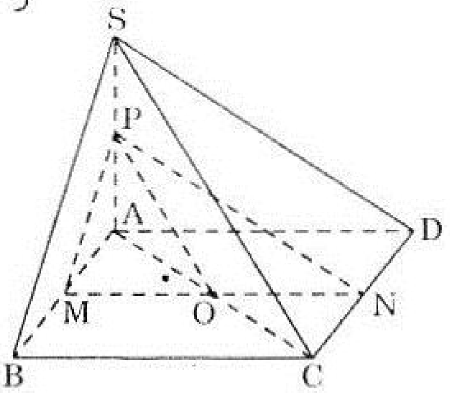
> *Ta dùng định lí :*
>
> $$\left\{\begin{array}{l} a \text{ không nằm trên mp } (P) \\ a \parallel b \text{ với } b \subset mp\,(P) \end{array}\right. \Rightarrow a \parallel mp\,(P).$$

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD.

1. Chứng minh rằng : MN // mp (SBC).
2. Gọi P là trung điểm SA. Chứng minh rằng : SC // mp (MNP).

Giải

1. Ta có :
$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel BC \text{ (tính chất hình bình hành)} \\ BC \subset (SBC) \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel mp\,(SBC).$$



2. Gọi O = MN ∩ AC

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \text{O là trung điểm của AC} \\ \text{mà P là trung điểm của SA} \end{array}\right\}$$

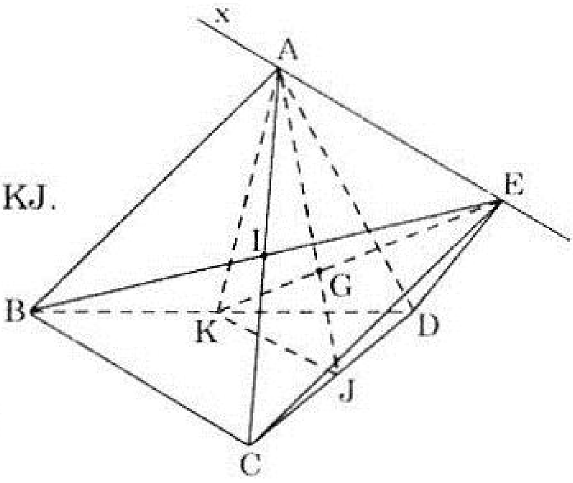
⇒ OP là đường trung bình của ΔSAC

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow OP \parallel SC \\ \text{mà } OP \subset (MNP) \end{array}\right\} \Rightarrow SC \parallel mp\,(MNP).$$

Bài 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AC, CD, DB.

1. Xác định giao điểm E của BI và mp (AKJ).
2. Chứng minh rằng : AB // mp (CDE).
3. Gọi G là giao điểm của KE và mp (ACD). Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ACD.

Giải



1. Ta có :
$$\left.\begin{array}{l} A \in (ABC) \cap (AKJ) \\ BC \subset (ABC);\ KJ \subset (AKJ) \\ BC \parallel KJ \end{array}\right\}$$

⇒ (ABC) ∩ (AKJ) = Ax với Ax // BC // KJ.

Vậy ta có : Ax, BI ⊂ (ABC)

⇒ Ax ∩ BI = E

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} E \in BI \\ E \in Ax;\ Ax \subset (AKJ) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} E \in BI \\ E \in (AKJ) \end{array}\right.$$

⇒ E = BI ∩ (AKJ).

2. Ta có : AE // BC (do Ax // BC)

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \Delta IAE \backsim \Delta ICB\\ \text{mà tỉ số đồng dạng là : } \dfrac{IA}{IC}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta IAE = \Delta ICB$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AE = BC\\ \text{mà } AE \parallel BC\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ABCE là hình bình hành.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AB \parallel CE\\ CE \subset (CDE)\end{array}\right\}\Rightarrow AB \parallel \text{mp }(CDE).$$

3. Trong mp (AKJ), ta có : $AJ \cap KE = G$

$$\Rightarrow \begin{cases}G \in KE\\ G \in AJ;\ AJ \subset (ACD)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}G \in KE\\ G \in (ACD)\end{cases} \Rightarrow G = KE \cap (ACD).$$

Ta chứng minh G là trọng tâm của ΔACD.

Vì : KJ // AE (do KJ //Ax)

$\Rightarrow \Delta GKJ \backsim \Delta GEA$

$$\Rightarrow \frac{GJ}{GA}=\frac{KJ}{EA}=\frac{KJ}{BC}\ \text{(AE = BC do ABCE là hình bình hành)}$$

$$=\frac{KJ}{2KJ}=\frac{1}{2}\ \text{(do KJ là đường trung bình của }\Delta BCD)$$

$\Rightarrow GA = 2GJ$

Mà G thuộc đường trung tuyến AJ của ΔACD ⇒ G là trọng tâm ΔCD.

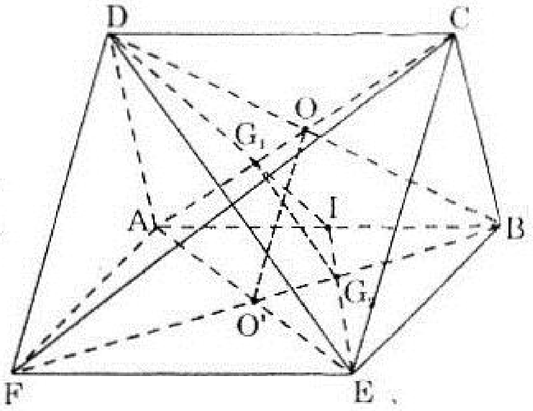
Bài 3. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O' lần lượt là tâm của các hình bình hành ABCD và ABEF; G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD và ABE. Chứng minh rằng :

1. OO' song song với mp (ADF). 2. G_1G_2 song song với mp (CEF).

Giải

1. Ta có : $\left.\begin{array}{l}OO' \parallel DF \text{ (vì OO' là đường trung bình của }\Delta BDF)\\ \text{mà } DF \subset (ADF)\end{array}\right\}$

$\Rightarrow OO' \parallel \text{mp }(ADF).$



2. Ta có : mp (CEF) ≡ mp (CDFE)

$\Rightarrow DE \subset (CEF)$

Mặt khác G_1 là trọng tâm ΔABD

$\Rightarrow DG_1$ cắt AB tại trung điểm I của AB.

Tương tự EG_2 cắt AB tại trung điểm I của AB.

Trong mp (IDE), ta có :

$\frac{IG_1}{ID} = \frac{1}{3}$ (do G_1 là trọng tâm của ΔABD)

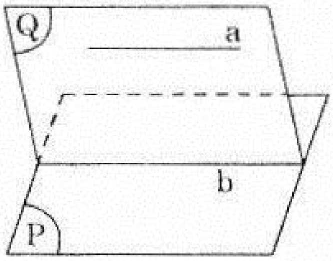
$\frac{IG_2}{IE} = \frac{1}{3}$ (do G_2 là trọng tâm của ΔABE)

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{IG_1}{ID} = \dfrac{IG_2}{IE} \Rightarrow G_1G_2 \,//\, DE \\ \text{mà } DE \subset (CEF) \end{array}\right\} \Rightarrow G_1G_2 \,//\, \text{mp}\,(CEF).$$

CHỦ ĐỀ 8. Thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (có yếu tố đường thẳng song song với mặt phẳng)

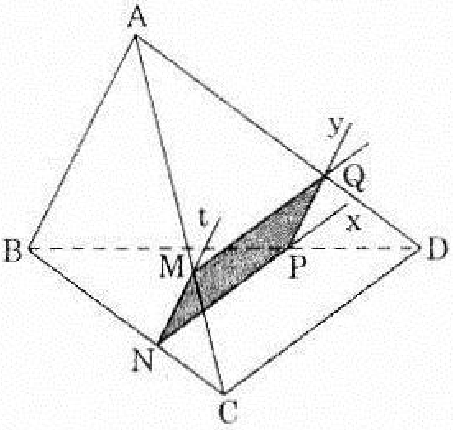
Thông thường ta dùng hệ quả a.

$$\left.\begin{array}{l} a \,//\, (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{array}\right\} \Rightarrow a \,//\, b.$$



Bài 1. Cho hình chóp tam giác ABCD; M là điểm giữa A và C. Mặt phẳng (P) qua M và mp (P) song song với AB và CD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (P). Thiết diện đó là hình gì ?

Giải



- Ta có : $\left.\begin{array}{l} M \in (P) \cap (ABC) \\ \text{mà } AB \subset (ABC) \\ AB \,//\, (P) \end{array}\right\}$

  $\Rightarrow (P) \cap (ABC) = Mt$ với $Mt \,//\, AB$

  Gọi $N = Mt \cap BC$

  Vậy : $MN \,//\, AB$ (a)

- Ta có : $\left.\begin{array}{l} N \in (P) \cap (BCD) \\ CD \subset (BCD) \\ CD \,//\, (P) \end{array}\right\} \Rightarrow (P) \cap (BCD) = Nx$ với $Nx \,//\, CD$

  Gọi $Nx \cap BD = P$

  Vậy : $NP \,//\, CD$ (b)

- Ta có : $\left.\begin{array}{l} P \in (P) \cap (ABD) \\ AB \subset (ABD) \\ AB \,//\, (P) \end{array}\right\} \Rightarrow (P) \cap (ABD) = Py$ với $Py \,//\, AB$

  Gọi $Py \cap AD = Q$

  Vậy : $PQ \,//\, AB$ (c)

- Ta có : $$\left.\begin{array}{l} QM = (P)\cap(ACD) \\ CD \subset (ACD) \\ CD \parallel (P) \end{array}\right\} \Rightarrow QM \parallel CD \quad (d)$$

Vậy thiết diện của hình chóp tam giác ABCD cắt bởi mp (P) là tứ giác MNPQ.

Từ (a) và (c) cho : MN // PQ.

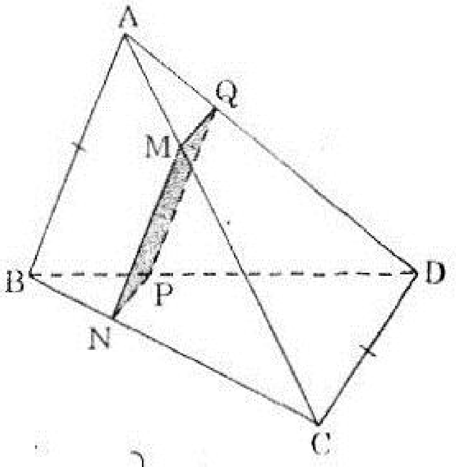
Từ (b) và (d) cho : NP // MQ.

Suy ra tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Bài 2. Cho tứ diện ABCD có AB = AC = CD = a, M là điểm trên cạnh AC sao cho AM = x (với $0 < x < a$). Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD; (P) cắt các cạnh BC, BD, AD lần lượt tại N, P, Q.

1. Tứ giác MNPQ là hình gì ?
2. Giả sử MN vuông góc với NP. Tính diện tích tứ giác MNPQ theo a và x. Tìm giá trị của x để diện tích tứ giác MNPQ là lớn nhất.

Giải



1. Ta có : $$\left.\begin{array}{l} MN = (ABC)\cap(P) \\ AB \parallel (P) \\ AB \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel AB$$

Chứng minh tương tự có : PQ // AB

Suy ra : MN // PQ (a)

Ta lại có :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} MQ = (ACD)\cap(P) \\ CD \parallel (P) \\ CD \subset (ACD) \end{array}\right\} \Rightarrow MQ \parallel CD \\ \text{Chứng minh tương tự : } NP \parallel CD \end{array}\right\} \Rightarrow MQ \parallel NP \quad (b)$$

Từ (a) và (b) ta có tứ giác MNPQ là hình bình hành.

2. Theo giả thiết MN vuông góc NP $\Rightarrow \widehat{MNP} = 90^0$, mà theo chứng minh câu 1, tứ giác MNPQ là hình bình hành. Suy ra MNPQ là hình chữ nhật.

Vậy : $S_{MNPQ} = MN.MQ$

Ta có : $$\left.\begin{array}{r} MQ \parallel CD \Rightarrow \Delta AMQ \backsim \Delta ACD \\ \text{mà } \Delta ACD \text{ cân tại C} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMQ \text{ cân tại M}$$
$$\Rightarrow MQ = AM = x.$$

Ta lại có : $$\left.\begin{array}{r} MN \parallel AB \Rightarrow \Delta CMN \backsim \Delta CAB \\ \text{mà } \Delta CAB \text{ cân tại A} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta CMN \text{ cân tại M}$$

$$\Rightarrow MN = CM = CA - AM = a - x$$

Vậy : $S_{MNPQ} = (a - x).x.$

- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số a − x và x, ta có :

$$(a-x)x \le \left[\frac{(a-x)+x}{2}\right]^2 \Rightarrow (a-x)x \le \frac{a^2}{4}$$

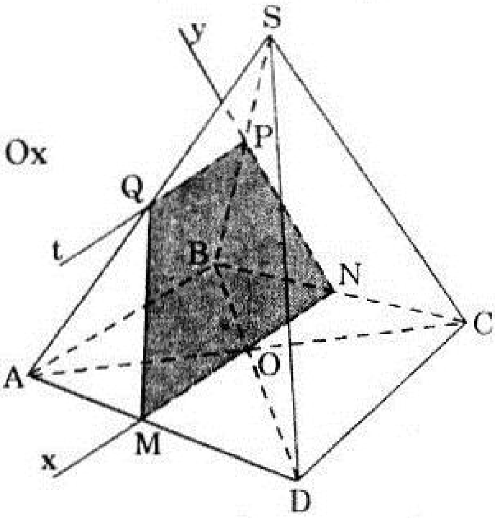
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a - x = x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác MNPQ là $\frac{a^2}{4}$ khi đó $x = \frac{a}{2}$ (tức M là trung điểm của AC).

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác lồi, O là giao điểm hai đường chéo AC và BD.

Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp (P) đi qua O, song song với AB và SC. Hỏi thiết diện đó là hình gì?

Giải



Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} O \in (P) \cap (ABCD) \\ AB \parallel (P) \\ AB \subset (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow (P) \cap (ABCD) = Ox$$ với $Ox \parallel AB$.

Gọi $Ox \cap AD = M$

$Ox \cap BC = N$

Vậy : $MN \parallel AB$ (a)

Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} N \in (P) \cap (SBC) \\ SC \parallel (P) \\ SC \subset (SBC) \end{array}\right\} \Rightarrow (P) \cap (SBC) = Ny \text{ với } Ny \parallel SC.$$

Gọi $Ny \cap SB = P$

Ta lại có :

$$\left.\begin{array}{l} P \in (P) \cap (SAB) \\ AB \parallel (P) \\ AB \subset (SAB) \end{array}\right\} \Rightarrow (P) \cap (SAB) = Pt \text{ với } Pt \parallel AB.$$

Gọi $Pt \cap SA = Q$

Vậy : $PQ \parallel AB$ (b)

Vậy thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mp (P) là một tứ giác MNPQ.

Từ (a) và (b) ta có : $MN \parallel QP$

$\Rightarrow$ Tứ giác MNPQ là hình thang.

TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với đáy lớn là AB. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SCD và SAB.

1. Chứng minh đường thẳng MN song song với mp (ABCD).
2. Mặt phẳng (MAB) cắt SD, SC tại I, J. Chứng minh IN song song với mp (ABCD).
3. Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mp (IJN).

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông và SAB là tam giác đều. Lấy điểm M trên cạnh BC và điểm K trên cạnh SA sao cho BM = AK.

1. Chứng minh rằng MK song song với mp (SCD).
2. Mặt phẳng (P) qua điểm M và song song AB, SB. (P) cắt SC, SD và AD theo thứ tự tại N, P, Q. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình thang.

Bài 6. Cho tứ diện ABCD. G là trọng tâm của ΔABD, I là điểm nằm trên cạnh BC sao cho BI = 2IC. Chứng minh rằng IG song song với mặt phẳng (ACD).

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SC; mp (P) qua đường thẳng AM và song song với BD.

1. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi mp (P).
2. Gọi E và F lần lượt là giao điểm của mp (P) với các cạnh SB và SD. Hãy tìm tỉ số diện tích của hai tam giác SME và SBC.
3. Gọi L là giao điểm của ME và CB; J là giao điểm của MF và CD. Chứng minh rằng ba điểm K, A, J cùng thuộc một đường thẳng song song với EF và tính tỉ số $\frac{EF}{LJ}$.

Bài 8. Cho tứ diện ABCD, một mặt phẳng (P) di động luôn luôn song song với AB và CD lần lượt cắt các cạnh AC, AD, BD và BC lần lượt tại M, N, E, F.

1. Chứng minh rằng MNEF là một hình bình hành.
2. Gọi I là tâm của hình bình hành MNEF. Tìm tập hợp điểm I.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 4.

1. Gọi L và K lần lượt là trung điểm của AB và CD.

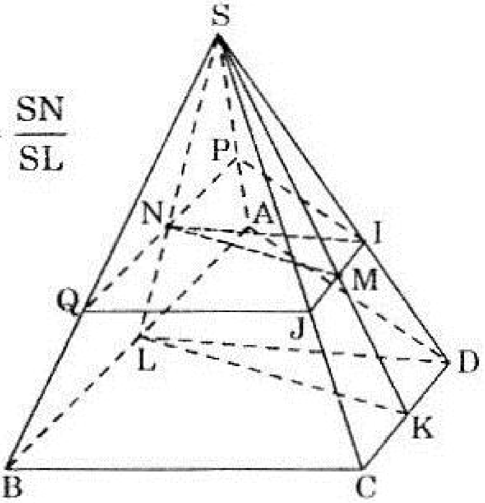
   Vì N là trọng tâm của ΔSAB nên có : $\frac{SN}{SL} = \frac{2}{3}$

Và M là trọng tâm của ΔSCD nên có : $\dfrac{SM}{SK} = \dfrac{2}{3}$

Suy ra : $\dfrac{SN}{SL} = \dfrac{SM}{SK}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow MN \parallel LK \\ \text{Mà } LK \subset (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel (ABCD).$$

2. $$\left.\begin{array}{l} \text{Ta có : } IJ = (MAB) \cap (SCD) \\ \text{Mà } AB \parallel CD \\ AB \subset (MAB);\ CD \subset (SCD) \end{array}\right\} \Rightarrow IJ \parallel CD \parallel AB.$$



$$\left.\begin{array}{l} \text{hay } MI \parallel KD \Rightarrow \dfrac{SI}{SD} = \dfrac{SM}{SK} = \dfrac{2}{3} \\ \text{mà ta có : } \dfrac{SN}{SL} = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{SI}{SD} = \dfrac{SN}{SL}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow NI \parallel LD \\ \text{Mà } LD \subset (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow NI \parallel (ABCD).$$

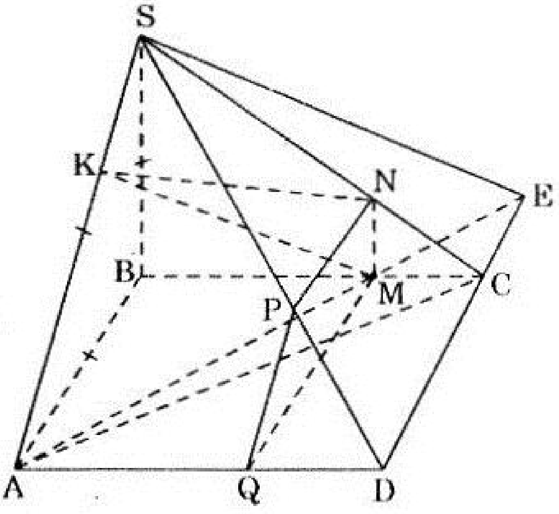
3 $$\left.\begin{array}{l} \text{Ta có : } \left.\begin{array}{l} IJ \parallel CD \\ AB \parallel CD \end{array}\right\} \Rightarrow IJ \parallel AB \\ \text{Mà } N \in (IJN) \cap (SAB) \\ \text{Và có : } IJ \subset (IJN);\ AB \subset (SAB) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow (IJN) \cap (SAB) = Nx$ với $Nx \parallel AB \parallel CD$

Gọi $Nx \cap SB = Q$ và $Nx \cap SA = P$

Vậy thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mp (IJN) là tứ giác PQJI.

Bài 5.



1 Gọi E = AM ∩ CE. Ta có : AB // CE

$$\Rightarrow \frac{AM}{ME} = \frac{BM}{MC} = \frac{BM}{BC - BM} \qquad (a)$$

$$\text{Mà } \frac{AK}{KS} = \frac{BM}{KS} = \frac{BM}{SA - AK} \qquad (b)$$

Lại có : SA = AB = BC (ΔSAB là tam giác đều và ABCD là hình vuông)

AK = BM (giả thiết)

$$\Rightarrow \frac{BM}{BC - BM} = \frac{BM}{SA - AK} \qquad (c)$$

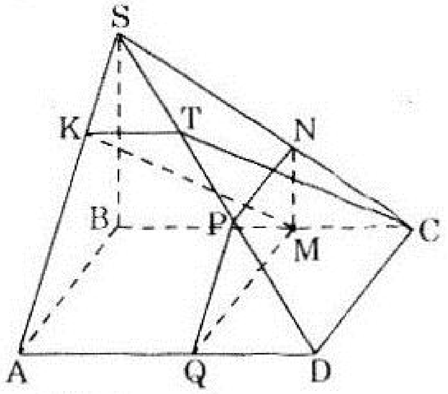
Từ (a), (b) và (c) cho : $\dfrac{AM}{ME} = \dfrac{AK}{KS}$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \text{ KM // SE (định lí đảo Thales)}\\ \text{mà SE} \subset \text{(SDC)}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{KM // mp (SDC).}$$

- *Chú ý :* Ta còn chứng minh bằng cách khác :

Trong mp (SAD) kẻ KT // AD cắt AD tại T. Ta có : $\dfrac{KT}{AD} = \dfrac{SK}{SA}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Mà}\quad SA = BC\\ \qquad\ SK = SA - AK \text{ và } MC = BC - BM\\ \text{lại có } AK = BM\end{array}\right\} \Rightarrow SK = BM$$



$$\left.\begin{array}{l}\text{Vậy } \dfrac{KT}{AD} = \dfrac{MC}{BC}\\ \text{Mà}\quad AD = BC\end{array}\right\} \Rightarrow KT = MC \quad \text{(d)}$$

$$\text{lại có } \left.\begin{array}{l}KT \,//\, AD\\ BC \,//\, AD\end{array}\right\} \Rightarrow KT \,//\, BC$$

$$\Rightarrow KT \,//\, MC \quad \text{(e)}$$

Từ (d) và (e) suy ra tứ giác KTCM là hình bình hành.

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\ KM \,//\, TC\\ \text{Mà } TC \subset (SCD)\end{array}\right\} \Rightarrow KM \,//\, (SCD).$$

2. Ta có :

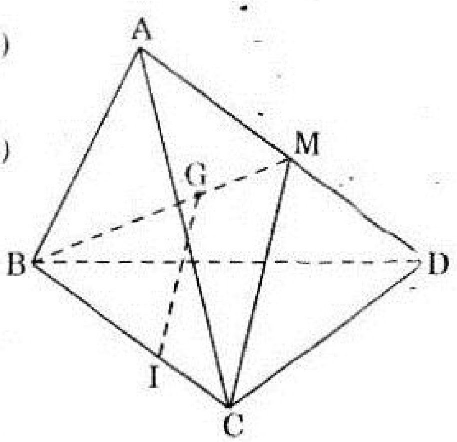
$$\left.\begin{array}{l}AB \,//\, (P)\\ AB \subset (ABCD);\ (ABCD) \cap (P) = MQ\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}AB \,//\, MQ\\ \text{mà } AB \,//\, DC\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\ MQ \,//\, DC\\ MQ \subset (P);\ DC \subset (SDC)\\ (P) \cap (SDC) = PN\end{array}\right\} \Rightarrow PN \,//\, QM \Rightarrow \text{MNPQ là hình thang.}$$

Bài 6. Gọi M là trung điểm của AD $\Rightarrow$ B, G, M thẳng hàng.

$\Rightarrow$ BM là trung tuyến ΔABD

$$\Rightarrow BG = 2GM \Rightarrow \frac{BG}{GM} = 2 \quad \text{(a)}$$



$$\text{Mặt khác có : } BI = 2IC \Rightarrow \frac{BI}{IC} = 2 \quad \text{(b)}$$

$$\text{Từ (a) và (b) cho : } \frac{BG}{GM} = \frac{BI}{IC}$$

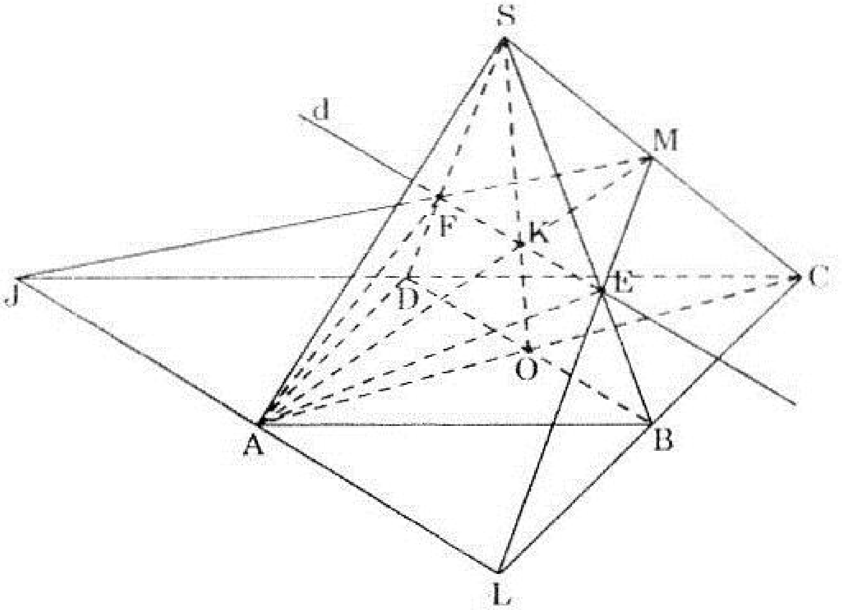
$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow IG \,//\, CM\\ \text{Mà } CM \subset (ACD)\end{array}\right\} \Rightarrow IG \,//\, \text{mp } (ACD).$$

Bài 7.

1. Ta dựng mp (P).

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Trong mp (SAC), SO cắt AM tại K.



Trong mp (SBD), vẽ đường thẳng d qua K và d // BD, d cắt SB và SD lần lượt tại E và F.

Ta có mặt phẳng (P) chính là mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau d và AM.

Vậy thiết diện của hình chóp S.ABCD xác định bởi mp (P) là tứ giác AEMF.

2. Ta có SO và AM lần lượt là hai trung tuyến của ΔSAC.

Mà : $SO \cap AM = K \Rightarrow$ K là trọng tâm của ΔSAC $\Rightarrow \dfrac{SK}{SO} = \dfrac{2}{3}$

Mà d // BD $\Rightarrow KE // OB \Rightarrow \dfrac{SK}{SO} = \dfrac{SE}{SB} \Rightarrow \dfrac{SE}{SB} = \dfrac{2}{3}$

Ta có : $\dfrac{S_{\Delta SME}}{S_{\Delta SBC}} = \dfrac{\dfrac{1}{2}SE.SM.\sin\widehat{ESM}}{\dfrac{1}{2}SB.SC.\sin\widehat{SBC}} = \dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SE}{SB} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

3. Ta có : $L = ME \cap CB$

$$\Rightarrow \begin{cases} L \in ME,\ ME \subset (P) \Rightarrow L \in (P) \\ L \in CB,\ CB \subset (ABCD) \Rightarrow L \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow L \in (ABCD) \cap (P)$$

Chứng minh tương tự : $J \in (ABCD) \cap (P)$

và dễ thấy $A \in (ABCD) \cap (P)$

Vậy $L, J, A \in (ABCD) \cap (P) \Rightarrow$ Ba điểm L, J và A thẳng hàng hay L, J và A cùng thuộc một đường thẳng Δ.

Ta chứng minh Δ // EF.

$$\text{Ta có : } \left.\begin{array}{l} \Delta = (P) \cap (ABCD) \\ EF // BD \text{ (do d // BD)} \\ EF \subset (P),\ BD \subset (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta // EF // BD.$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Ta có : } OB \mathbin{/\!/} AL \quad (\text{do } BD \mathbin{/\!/} \Delta)\\ \text{Mà O là trung điểm AC}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{OB là đường trung bình của } \Delta CAL.$$

$\Rightarrow$ B là trung điểm của CL.

Chứng minh tương tự : D là trung điểm của CJ.

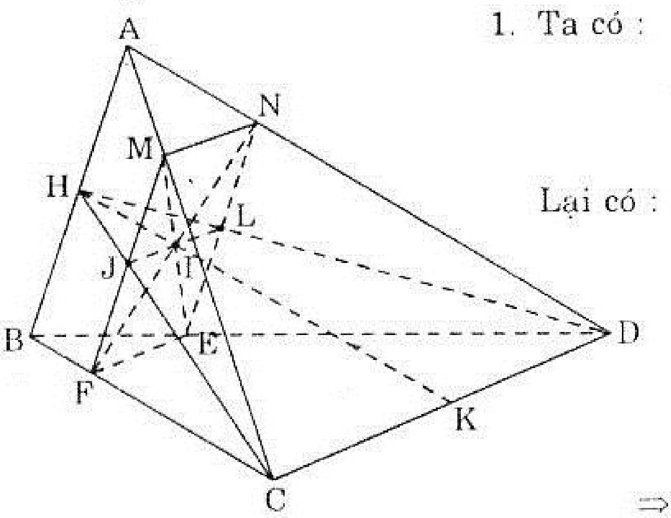
$\Rightarrow$ DB là đường trung bình của ΔCJL

$\Rightarrow JL = 2BD \quad \Rightarrow BD = \dfrac{JL}{2} \quad (1)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Mà } EF \mathbin{/\!/} BD \quad \Rightarrow \dfrac{EF}{BD} = \dfrac{SE}{SB}\\ \text{và } \dfrac{SK}{SO} = \dfrac{SE}{SB} = \dfrac{2}{3} \text{ (cmt)}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{EF}{BD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow BD = \dfrac{3EF}{2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\dfrac{JL}{2} = \dfrac{3EF}{2} \Rightarrow \dfrac{EF}{JL} = \dfrac{1}{3}$.

Bài 8.



1. $$\left.\begin{array}{l}\text{Ta có : } AB \mathbin{/\!/} (P)\\ AB \subset (ABC)\\ (P) \cap (ABC) = MF\end{array}\right\} \Rightarrow MF \mathbin{/\!/} AB$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Lại có : } AB \mathbin{/\!/} (P)\\ AB \subset (ABD)\\ (P) \cap (ABD) = NE\end{array}\right\} \Rightarrow NE \mathbin{/\!/} AB$$

$\Rightarrow MF \mathbin{/\!/} NE$

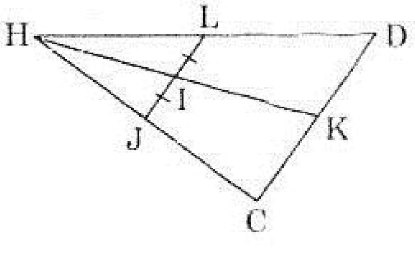
Chứng minh tương tự : $MN \mathbin{/\!/} EF$

$\Rightarrow$ Tứ giác MNEF là hình bình hành.

2. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Và gọi : $J = HC \cap MF$

$L = HD \cap NE$



Vì $MF \mathbin{/\!/} AB$ mà CH là đường trung tuyến của ΔCAB.

$\Rightarrow$ CJ là đường trung tuyến của ΔCFM.

$\Rightarrow$ J là trung điểm của MF.

Chứng minh tương tự : L là trung điểm của NE.

$\Rightarrow$ J, I, L thẳng hàng hay I thuộc đoạn JL và I là trung điểm của đoạn JL.

Mặt khác : $JL \mathbin{/\!/} CD$ (do cùng song song với EF) $\Rightarrow$ I thuộc đoạn HK.

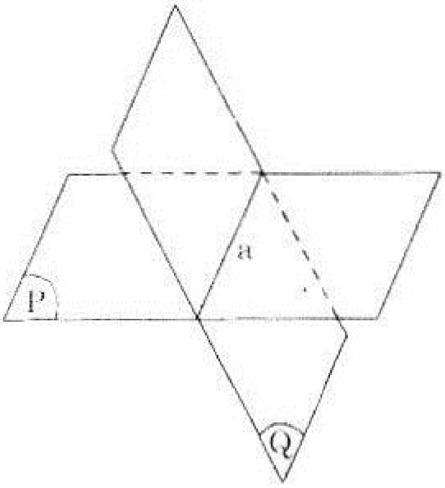
Phần đảo (xin tự chứng minh).

Vậy tập hợp tâm I của hình bình hành MNEF là đoạn HK.

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

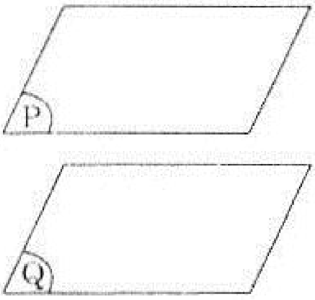
D. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng phân biệt



$(P) \cap (Q) = a$

((P) cắt (Q) theo giao tuyến a)

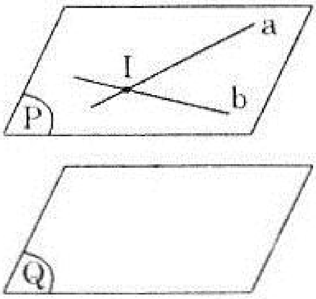


$(P) /\!/ (Q)$

((P) và (Q) song song với nhau)

Vậy : $(P) /\!/ (Q) \overset{đn}{\Leftrightarrow} (P) \cap (Q) = \varnothing$

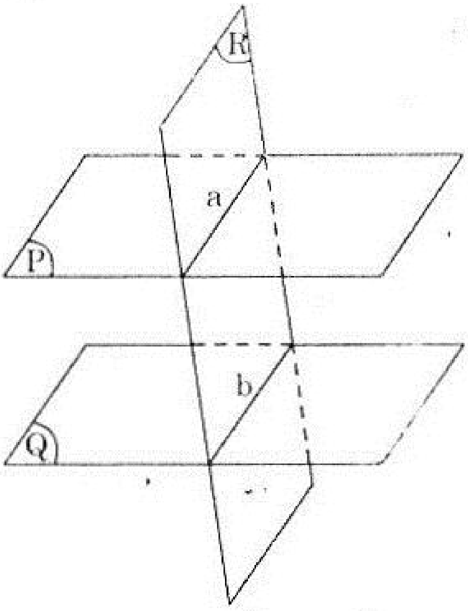
2. Điều kiện để hai mặt phẳng song song



Định lí 1 : *Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).*

Vậy : $\left.\begin{matrix} a \cap b = I \\ a \subset (P),\ b \subset (P) \\ a /\!/ (Q),\ b /\!/ (Q) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (P) /\!/ (Q).$

3. Tính chất



- ***Tính chất 1 :*** *Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.*

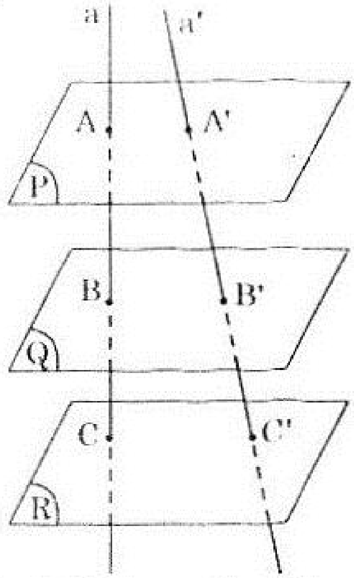
  Hệ quả :

  – Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng (P) song song với (Q).

  – Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song nhau.

- ***Tính chất 2 :*** *Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì cũng cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song với nhau.*

Vậy : $\left.\begin{array}{l}(P) \parallel (Q) \\ (R) \cap (P) = a\end{array}\right\} \Rightarrow (R) \cap (Q) = b$ và $a \parallel b$.



4. Định lí Ta-lét trong không gian

Định lí 2 *(Định lí Ta-lét)*

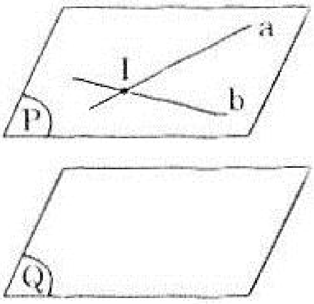
Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Định lí 3 *(Định lí Ta-lét đảo)*

Giả sử trên hai đường thẳng chéo nhau a và a' lần lượt lấy các điểm A, B, C và A', B', C' sao cho : $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$

Khi đó ba đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song (tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng).

CHỦ ĐỀ 9. Chứng minh hai mặt phẳng song song



Để chứng minh hai mặt phẳng song song, ta chứng minh trên mặt phẳng này có hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng còn lại.

$$\left.\begin{array}{l}a \cap b = I \\ a, b \subset (P) \\ a \parallel (Q),\ b \parallel (Q)\end{array}\right\} \Rightarrow (P) \parallel (Q).$$

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD.

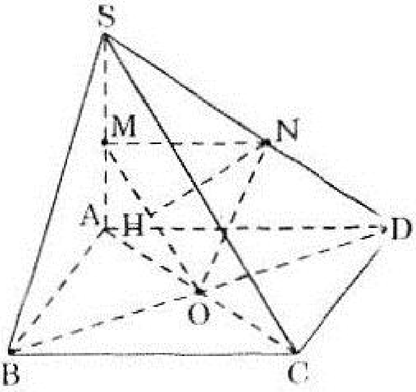
1. Chứng minh mặt phẳng (OMN) song song mặt phẳng (SBC).
2. Gọi H là trung điểm OM. Chứng minh : HN // mp (SBC).

Giải

1. Ta có : MN // AD (do MN là đường trung bình của ΔSAD)

mà AD // BC

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow MN \parallel BC \\ \text{Mà } BC \subset (SBC)\end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel (SBC).$



Mặt khác : ON // SB (do ON là đường trung bình của ΔSBD)

SB ⊂ (SBC)

⇒ ON // (SBC)

$$\text{Vậy có : }\left.\begin{array}{l} MN \,//\, (SBC);\quad ON \,//\, (SBC)\\ MN \cap ON = N\\ MN, ON \subset (OMN)\end{array}\right\} \Rightarrow (OMN) \,//\, (SBC).$$

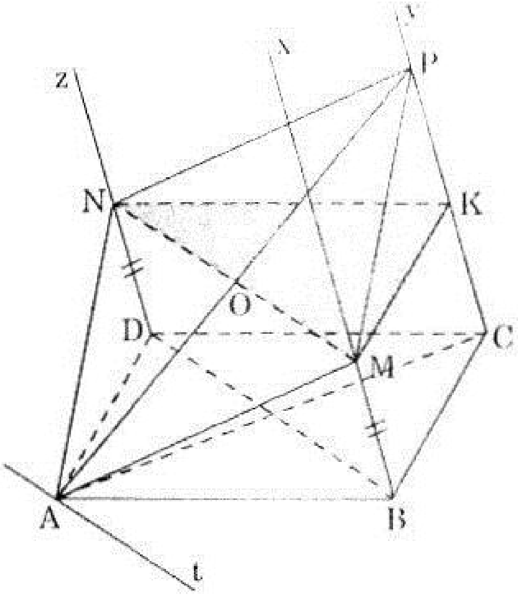
2. $$\left.\begin{array}{ll} \text{Ta có :} & (OMN) \,//\, (SBC)\\ \text{Mà} & HN \subset (OMN)\end{array}\right\} \Rightarrow HN \,//\, (SBC).$$

- ***Chú ý :*** $$\left.\begin{array}{l} (P) \,//\, (Q)\\ a \subset (P)\end{array}\right\} \Rightarrow a \,//\, (Q).$$

Bài 2. Cho hình bình hành ABCD. Gọi Bx, Cy, Dz là ba nửa đường thẳng song song nhau đôi một và cùng nằm một phía đối với mp (ABCD). Gọi M, N là hai điểm di động trên Bx, Dz sao cho BM = DN = x (với x > 0) và Cy cắt mp (AMN) tại P.

1. Tứ giác AMPN là hình gì ?
2. Chứng minh rằng khi x thay đổi thì (AMN) luôn đi qua một đường thẳng cố định.
3. Gọi K là trung điểm của CP. Chứng minh rằng : (KMN) // (ABCD).

Giải



1. $$\left.\begin{array}{ll} \text{Ta có : } AD \,//\, BC;\ BC \subset (B;\, Cy) & \Rightarrow AD \,//\, (B;\, Cy)\\ \text{Và có : } Dz \,//\, Cy;\ \ Cy \subset (B;\, Cy) & \Rightarrow Dz \,//\, (B;\, Cy)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{mà} & AD \cap Dz = D\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{và} & AD, Dz \subset (A;\, Dz)\end{array}\right\} \Rightarrow (A;\, Dz) \,//\, (B;\, Cy).$$

Chứng minh tương tự : (A; Bx) // (D; Cy).

$$\text{Ta có : }\left.\begin{array}{l} (A;\, Dz) \,//\, (B;\, Cy)\ \text{(chứng minh trên)}\\ (AMN) \cap (A;\, Dz) = AN\\ (AMN) \cap (B;\, Cy) = MP\end{array}\right\} \Rightarrow AN \,//\, MP \quad (a)$$

Do : (A; Bx) // (D; Cy) nên chứng minh tương tự :   AM // NP   (b)

Từ (a) và (b) suy ra tứ giác AMPN là hình bình hành.

2. Ta có :
$$\left.\begin{array}{l} BM = DN \text{ (giả thiết)} \\ BM // DN \end{array}\right\} \Rightarrow \text{BMND là hình bình hành.}$$
$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow MN // BD \\ \text{Mà } MN \subset (AMN);\ BD \subset (ABCD) \\ \text{Và có } A \in (AMN) \cap (ABCD) \end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow (AMN) \cap (ABCD) = At \text{ với } At // BD \\ \text{Mà BD cố định, A cố định} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{At cố định.}$$

Vậy (AMN) qua một đường thẳng cố định là At.

3.
$$\left.\begin{array}{l} \text{Gọi } O = AP \cap MN \\ \text{Mà AMPN là hình bình hành} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{O là trung điểm AP và có} \\ \text{K là trung điểm của CP.} \end{array}$$

⇒ OK là đường trung bình của ΔACP.

$\Rightarrow OK // AC;\ AC \subset (ABCD) \quad \Rightarrow OK // (ABCD)$

Lại có : $MN // BD;\ BD \subset (ABCD) \Rightarrow MN // (ABCD)$

Vậy có :
$$\left.\begin{array}{l} OK // (ABCD) \\ MN // (ABCD) \\ MN \cap OK = O \\ MN, OK \subset (MNK) \end{array}\right\} \Rightarrow (MNK) // (ABCD).$$

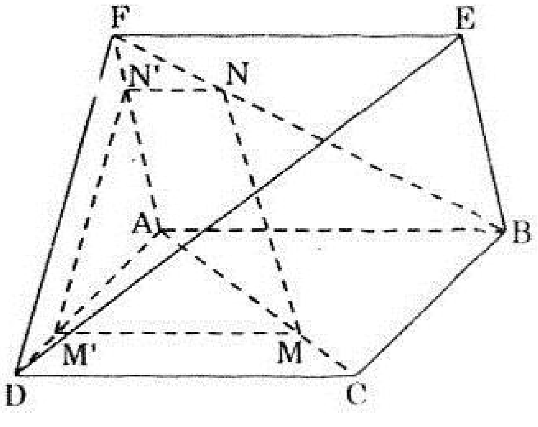
Bài 3. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. Trên đường chéo AC và BF lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho : $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = k\ (0 < k < 1)$.

Mặt phẳng (P) qua MN song song với AB cắt AD, AF tại M', N'.

1. Tứ giác MNN'M' là hình gì ?
2. Chứng minh : M'N' // (DEF) và MN // (DEF).
3. Tìm giá trị của k để tứ giác MNN'M' là hình bình hành.

Giải

1. Ta có :



$$\left.\begin{array}{l} AB // (P) \\ AB \subset (ABCD) \\ (ABCD) \cap (P) = MM' \end{array}\right\} \Rightarrow MM' // AB \text{ (a)}$$

Ta lại có :
$$\left.\begin{array}{l} AB // (P) \\ AB \subset (ABEF) \\ (ABEF) \cap (P) = NN' \end{array}\right\} \Rightarrow NN' // AB \quad \text{(b)}$$

Từ (a) và (b) suy ra :   MM' // NN' ⇒ MNN'M' là hình thang.

2. • Vì : $NN' /\!/ AB \Rightarrow \dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{BN}{BF} = k$ (c)

$$\left.\begin{array}{r} MM' /\!/ AB \\ \text{Mà } AB /\!/ CD \end{array}\right\} \Rightarrow MM' /\!/ DC \Rightarrow \frac{AM'}{AD} = \frac{AM}{AC} = k \quad (d)$$

Từ (c) và (d) suy ra : $\dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{AM'}{AD}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow M'N' /\!/ DF \\ \text{Mà } DF \subset (DEF) \end{array}\right\} \Rightarrow M'N' /\!/ (DEF).$$

- Nhận xét : (DEF) ≡ (DCEF)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Ta có :} & M'N' /\!/ (DEF) \text{ (chứng minh trên)} \\ & \left.\begin{array}{l} M'M /\!/ DC \\ DC \subset (DEF) \end{array}\right\} \Rightarrow M'M /\!/ (DEF) \\ \text{mà} & M'N' \cap M'M = M' \\ \text{và} & M'N',\ M'M \subset (MNN'M') \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Suy ra : } (MNN'M') /\!/ (DEF) \\ \text{Mà : } MN \subset (MNN'M') \end{array}\right\} \Rightarrow MN /\!/ (DEF).$$

3. Hình thang MNN'M' là hình bình hành ⇔ MM' = NN'.

Vì : $MM' /\!/ DC \Rightarrow \dfrac{MM'}{DC} = \dfrac{AM}{AC} = k$

$$NN' /\!/ AB \Rightarrow \frac{NN'}{AB} = \frac{FN}{FB} = \frac{FB - BN}{FB} = 1 - \frac{BN}{FB} = 1 - k$$

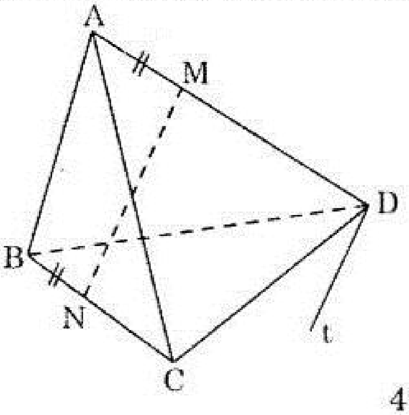
$$\left.\begin{array}{r} \text{Vì : } MM' = NN' \\ DC = AB \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MM'}{DC} = \frac{NN'}{AB} \Rightarrow k = 1 - k \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Dễ dàng thấy với $k = \dfrac{1}{2}$ thì tứ giác MNN'M' là hình bình hành.

Vậy $k = \dfrac{1}{2}$ thỏa đề bài.

Bài 4. Cho tứ diện đều ABCD. M và N là hai điểm di động lần lượt trên hai cạnh AD và BC sao cho AM = BN. Chứng minh rằng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

Giải



Ta có : AM = BN (giả thiết)

AD = BC (do ABCD là tứ diện đều)

$\Rightarrow MD = NC$

$$\Rightarrow \frac{AM}{BN} = \frac{MD}{NC} = \frac{AD}{BC} = 1 \qquad (a)$$

Vậy : ba đường thẳng AB, MN, DC, chắn trên hai cát tuyến BC và AD thành các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ (do (a)).

$\Rightarrow$ AB, MN và DC cùng song song với một mặt phẳng (P) nào đó.

Ta có thể lấy mp (P) chứa CD và song song với AB.

Vậy $MN // (P)$ với (P) cố định.

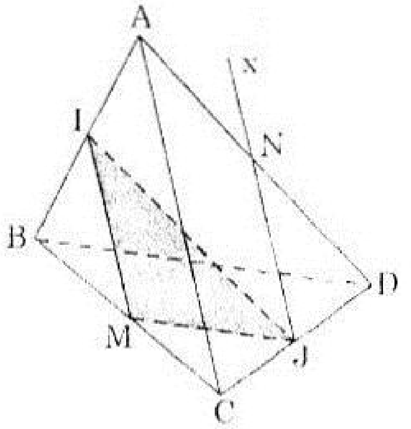
Bài 5. Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Mặt phẳng (P) chứa IJ cắt các cạnh AD và BC lần lượt tại N và M

1. Cho trước điểm M, hãy dựng điểm N.
2. Gọi K là giao điểm của MN và IJ. Chứng minh rằng K là trung điểm của đoạn MN.

Giải

1.• Xét M là trung điểm của BC.

Ta có : $IM // AC$ (vì IM là đường trung bình của ΔABC)



Mà : $IM \subset (IMJ)$

$AC \subset (ACD)$

và có $J \in (IMJ) \cap (ACD)$

$\Rightarrow (IMJ) \cap (ACD) = Jx$ với $Jx // AC$.

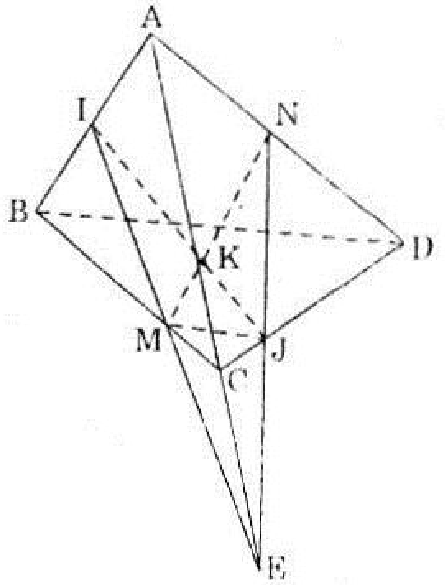
Trong mp (ACD), có : $Jx \cap AD = N$.

N chính là điểm cần dựng.

• Xét M không là trung điểm của BC.

Trong mp (ABC) : $IM \cap AC = E$

Trong mp (ACD) : $EJ \cap AD = N$



$$\Rightarrow \begin{cases} N \in AD \\ N \in EJ,\ EJ \subset (P) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N \in AD \\ N \in (P) \end{cases} \Rightarrow N = AD \cap (P).$$

2. Vì có : $\dfrac{IB}{IA} = \dfrac{CJ}{JD}$

$$\Rightarrow \frac{IB}{CJ} = \frac{IA}{JD} = \frac{IB + IA}{CJ + JD}$$

$$\Rightarrow \frac{IB}{JC} = \frac{IA}{JD} = \frac{AB}{CD}$$

$\Rightarrow$ IJ, BC và AD nằm trên ba mặt phẳng song song (định lí đảo Ta-lét)

Ba mặt phẳng này cắt hai đường thẳng AB và MN tại các điểm B, I A và M, K, N.

$\Rightarrow \dfrac{BI}{MK} = \dfrac{IA}{KN}$ (định lí Ta-lét) $\Rightarrow \dfrac{BI}{IA} = \dfrac{MK}{KN}$

Mà $\dfrac{BI}{IA} = 1$: do I là trung điểm AB

$\Rightarrow \dfrac{MK}{KN} = 1 \Rightarrow MK = KN$ $\Rightarrow$ K là trung điểm của MN.

- **Ghi chú :** *Thiết diện song song (có giả thiết hai mặt phẳng song song)*

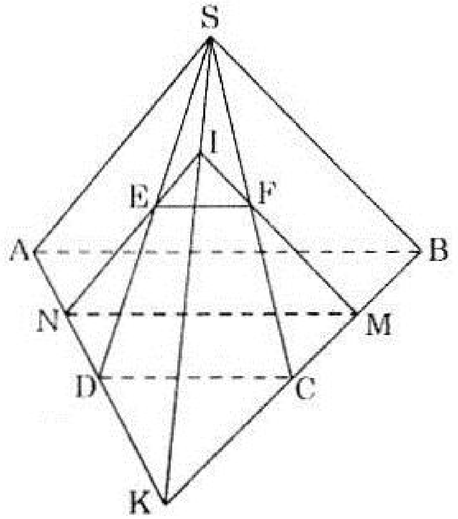
Dùng định lí : $\left.\begin{array}{r}(P)\,//\,(Q)\\ (R)\cap(P)=a\end{array}\right\} \Rightarrow (R)\cap(Q)=b$ *và* $a\,//\,b$.

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình thang (AB // CD). Gọi M là điểm thuộc cạnh BC không trùng với B và C. Mặt phẳng (P) qua M song song với (SAB) cắt AD, SD, SC tại N, E, F.

1 Tứ giác MNEF là hình gì ?

2 Gọi I là giao điểm của NE và MF. Chứng minh rằng I lưu động trên một đường thẳng cố định, khi M lưu động trên cạnh BC.

Giải



1 $\left.\begin{array}{ll}\text{Ta có :} & (P)\,//\,(SAB)\\ \text{Mà} & (ABCD)\cap(P)=MN\\ & (ABCD)\cap(SAB)=AB\end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow MN\,//\,AB\\ \text{Mà } AB\,//\,DC\end{array}\right\} \Rightarrow MN\,//\,DC\\ \text{Ta lại có : } MN\subset(P);\ DC\subset(SDC)\\ \qquad\text{và } (P)\cap(SDC)=EF\end{array}\right\}$

$\Rightarrow EF\,//\,MN\,//\,DC$

$\Rightarrow$ Tứ giác MNEF là hình thang.

2 Gọi $AD\cap BC = K$

$\Rightarrow \begin{cases}K\in AD;\ AD\subset(SAD)\\ K\in BC;\ BC\subset(SBC)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}K\in(SAD)\\ K\in(SBC)\end{cases}$

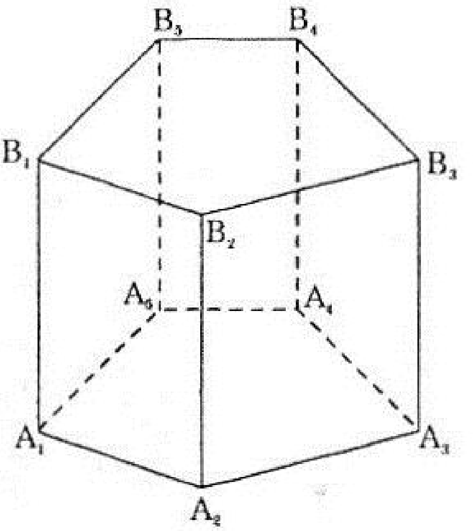
$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow K\in(SAD)\cap(SBC)\\ \text{lại có : } S\in(SAD)\cap(SBC)\end{array}\right\} \Rightarrow KS=(SAD)\cap(SBC).$

Ta có : $NE\cap MF = I$

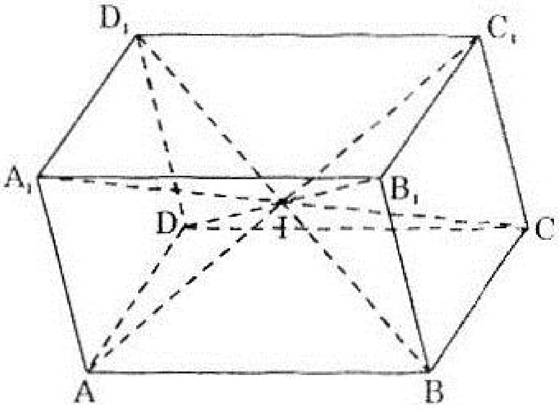
$\Rightarrow \begin{cases}I\in NE;\ NE\subset(SAD)\\ I\in MF;\ MF\subset(SBC)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}I\in(SAD)\\ I\in(SBC)\end{cases} \Rightarrow I\in(SAD)\cap(SBC)=KS$

$\Rightarrow$ I lưu động trên đường thẳng cố định KS.

CHỦ ĐỀ 10. Hình lăng trụ – Hình hộp



Hình lăng trụ $A_1A_2A_3A_4A_5.B_1B_2B_3B_1B_5$



Hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$

Chú ý : • *Hình lăng trụ có :*

1. Các mặt bên là hình bình hành.

2. Hai đáy là hai đa giác bằng nhau.

3. Các cạnh bên bằng nhau.

- *Hình hộp có :*

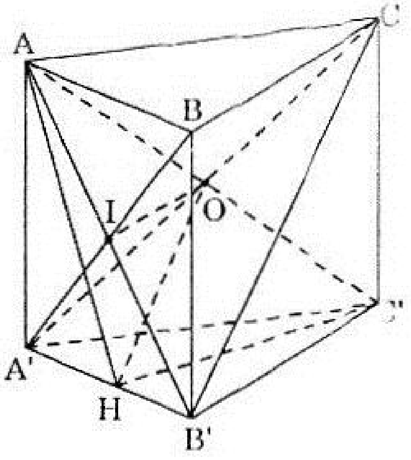
1. Có tất cả 6 mặt là hình bình hành.

2. Có 4 đường chéo đồng quy tại trung điểm I của mỗi đường. I gọi là tâm hình hộp.

Bài 1. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi H là trung điểm của cạnh A'B'.

1. Chứng minh CB' song song với mp (AHC').
2. Xác định giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB'C') và (A'BC). Chứng minh d song song mp (BB'C'C).

Giải



1. Gọi O = AC' ∩ A'C

Mà AA'C'C là hình bình hành

⇒ O là trung điểm của A'C

Mặt khác H là trung điểm A'B'

⇒ OH // B'C (tính chất đường trung bình)

Mà OH ⊂ (AHC')

⇒ B'C // (AHC').

2. Gọi I = AB' ∩ A'B

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in A'B;\ A'B \subset (A'BC) \\ I \in AB' \subset (AB'C') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (A'BC) \\ I \in (AB'C') \end{cases} \Rightarrow \quad I \in (A'BC) \cap (AB'C')$$

Do $O = AC' \cap A'C$ nên chứng minh tương tự có : $O \in (A'BC) \cap (AB'C')$

Vậy $(A'BC) \cap (AB'C') = OI \Rightarrow d \equiv OI$.

- Ta có I là trung điểm của AB', O là trung điểm của AC'.

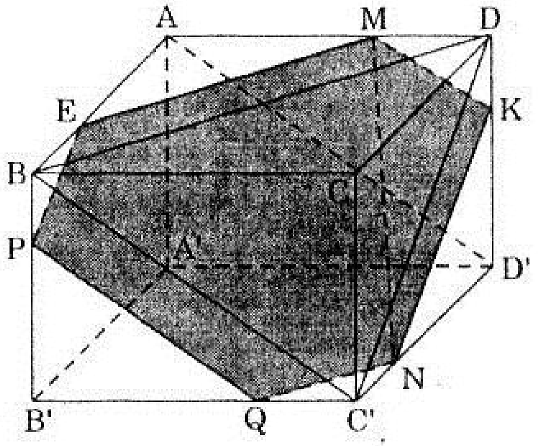
  $\Rightarrow OI \parallel B'C'$ (tính chất đường trung bình).

  Mà $B'C' \subset (BB'C'C) \Rightarrow OI \parallel (BB'C'C)$ hay $d \parallel (BB'C'C)$.

Bài 2. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. M là điểm thuộc cạnh AD, N là điểm thuộc cạnh D'C' sao cho : $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{D'N}{NC'}$.

1. Chứng minh : $MN \parallel (C'BD)$.
2. Xác định thiết diện hình hộp khi cắt bởi mp (P) qua MN và song song với (C'DB).

Giải



1. Ta có : $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{D'N}{NC'}$

$$\Rightarrow \frac{AM}{D'N} = \frac{MD}{NC'} = \frac{AD}{D'C'}$$

Vậy theo định lí đảo Ta-lét, ta có : MN, AD' và C'D cùng song song với một mặt phẳng (Q) $\Rightarrow$ AD' và DC' cùng song song với mp (Q).

Mà có : $AD' \parallel BC'$ (do ABC'D' là hình bình hành)

$$\left.\begin{array}{ll} \Rightarrow & BC' \parallel (Q) \\ \text{và có} & DC' \parallel (Q) \\ \text{mà} & DC' \cap BC' = C' \\ & DC', BC' \subset (BDC') \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \Rightarrow (BDC') \parallel (Q) \\ \text{Mà } MN \parallel (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel (BDC').$$

2. Ta có :

$$\left.\begin{array}{r} (P) \parallel (BDC') \\ \text{Mà : } (ABCD) \cap (BDC') = BD \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (ABCD) \cap (P) = ME \\ \text{với } ME \parallel BD \quad (E \in AB) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} (P) \parallel (BDC') \\ \text{Mà : } (BB'CC') \cap (BDC') = BC' \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (BB'CC') \cap (P) = PQ \\ \text{với } PQ \parallel BC' \quad (Q \in B'C' \text{ và } P \in BB') \end{array}$$

Chứng minh tương tự :

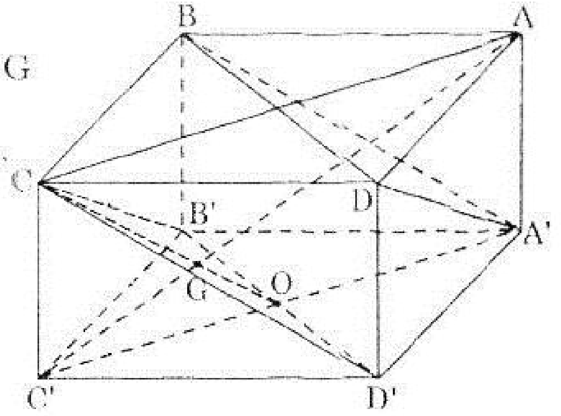
$(P) \cap (CC'D'D) = KN$ với $KN \parallel DC'$ (với $N \in D'C'$ và $K \in DD'$)

Vậy thiết diện nhận được là lục giác MEPQNK.

Bài 3. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

1. Xác định giao điểm G của AC' với mp (B'CD'). Chứng minh G là trọng tâm ΔB'CD'.
2. Chứng minh : (A'BD) // (B'CD').

Giải



1.• Gọi O = A'C' $\cap$ B'D'

Trong mp (AA'C'C), gọi : AC' $\cap$ CO = G

$$\Rightarrow \begin{cases} G \in AC' \\ G \in CO;\ CO \subset (B'CD') \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G \in AC' \\ G \in (B'CD') \end{cases}$$

$\Rightarrow$ G = AC' $\cap$ (B'CD').

- Ta có : AA'C'C là hình bình hành

$$\Rightarrow AC \,//\, A'C' \quad \Rightarrow \frac{CG}{GO} = \frac{AC}{C'O} = \frac{AC}{\frac{1}{2}A'C'} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow CG = 2GO \\ \text{Mặt khác : CO là trung tuyến của } \Delta B'CD' \end{array}\right\} \Rightarrow \text{G là trọng tâm } \Delta B'CD'.$$

2. Ta có : Tứ giác DD'B'B là hình bình hành.

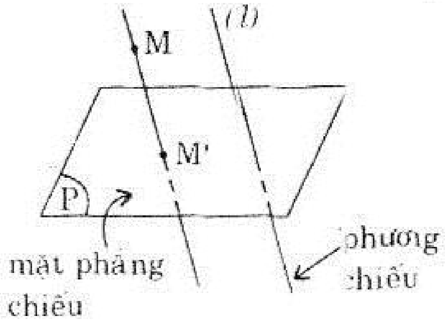
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \Rightarrow BD \,//\, B'D' \\ B'D' \subset (CB'D') \end{array}\right\} \Rightarrow BD \,//\, (CB'D') \\ \text{Chứng minh tương tự : } DA' \,//\, (CB'D') \\ \text{Mà } BD \cap DA' = D \text{ và } BD, DA' \subset (A'BD) \end{array}\right\} \Rightarrow (A'BD) \,//\, (B'CD').$$

CHỦ ĐỀ 11. Phép chiếu song song

1. Khái niệm phép chiếu song song

※ *Cho mp (P) và một đường thẳng l cắt mp (P).*

Phép chiếu song song lên mp (P) theo phương chiếu l là phép đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' là giao điểm của mp (P) với đường thẳng đi qua M và song song với đường thẳng l.



※ *Hình biểu diễn của một hình H trong không gian là hình chiếu H' của H qua một phép chiếu song song (hoặc một hình đồng dạng với H').*

Ta còn nói : H' là ảnh của H qua phép chiếu song song đó.

2. Tính chất

Chỉ xét hình chiếu song song của các đoạn thẳng, đường thẳng không song song hoặc trùng với phương chiếu l.

- *Hình chiếu song song của đường thẳng là đường thẳng.*
- *Hình chiếu song song của một đoạn thẳng là một đoạn thẳng, của một tia là một tia.*
- *Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.*
- *Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.*

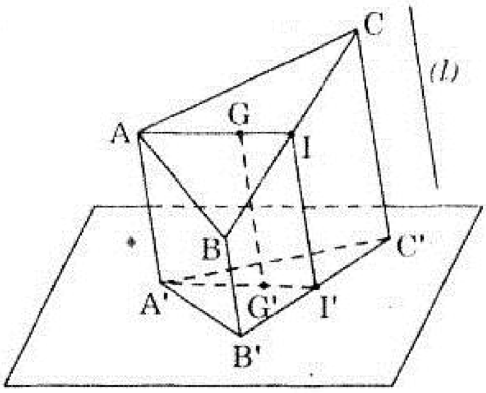
3. Hình biểu diễn song song của một hình trong không gian

- *Một hình tam giác ABC có thể xem là hình biểu diễn bất kì của một tam giác nào (tam giác thường, tam giác vuông, tam giác đều, ...)*
- *Một hình bình hành ABCD có thể xem là hình biểu diễn của một bất kì hình bình hành nào, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.*
- *Hình biểu diễn của một đường tròn là một đường elip hoặc đường tròn hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng.*

Bài 1. Cho tam giác ABC có hình chiếu song song là tam giác A'B'C'. Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác ABC có hình chiếu song song là trọng tâm G' của tam giác A'B'C'.

Giải

Gọi I là trung điểm cạnh BC qua phép chiếu song song thì I có hình chiếu là I' với $I' \in B'C'$, và ta có $G' \in A'I'$.



Ta có : $\dfrac{AG}{AI} = \dfrac{2}{3}$

Mà phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số của hai đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng.

$$\Rightarrow \frac{A'G'}{A'I'} = \frac{2}{3}$$

Mà G' thuộc đường trung tuyến A'I' của tam giác A'B'C' $\Rightarrow$ G' là trọng tâm của tam giác A'B'C'.

Bài 2. Cho tam giác ABC. Hãy chọn mặt phẳng chiếu (P) và phương chiếu *l* để hình chiếu tam giác ABC trên mp (P)

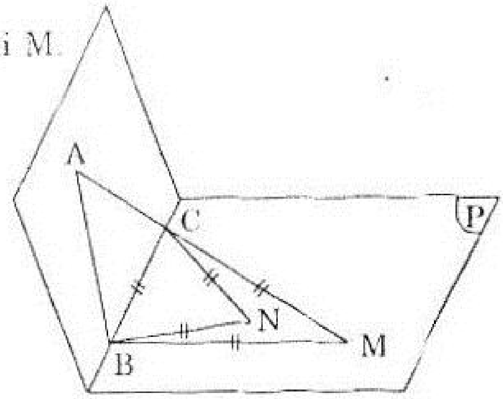
1. là một tam giác cân
2. là một tam giác đều
3. là một tam giác vuông.

Giải

1. Qua BC dựng mp (P) sao cho $A \notin (P)$.

   Trong mp (P) dựng tam giác BCM cân tại M.

   Vậy : Phép chiếu song song lên mp (P) theo phương chiếu l là AM biến tam giác ABC thành tam giác cân MBC.



2. Tương tự câu 1, trong mp (P) (ở câu 1) ta dựng tam giác BCN là một tam giác đều.

   Vậy : Phép chiếu song song lên mp (P) theo phương chiếu AN biến tam giác ABC thành tam giác đều NBC.

3. Tương tự.

BÀI TẬP TỔNG HỢP. Quan hệ song song

Bài 1. Cho tứ diện ABCD cạnh bằng a. Lấy M trên cạnh AB, N trên cạnh CD sao cho $AM = DP = \frac{a}{3}$. Mặt phẳng (P) qua MP song song với AC cắt BC tại N và AD tại Q. Tính diện tích tứ giác MNPQ.

Bài 2. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACC' và A'B'C'.

1. Chứng minh IJ song song mp (ABC').
2. Chứng minh JK song song mp (BB'C'C).
3. Chứng minh (IJK) // (BB'C'C).

Bài 3. Cho hình chóp S.ABC và một điểm M nằm bên trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M lần lượt song song với các đường thẳng SA, SB, SC cắt các mặt phẳng (SBC), (SCA), (SAB) tại A', B', C'.

1. Gọi N là giao điểm của SA' với BC. Chứng minh rằng A, M, N thẳng hàng.
2. Chứng minh rằng : $\frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{MA'}{SA}$.
3. Chứng minh rằng : $\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} = 1$.

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Một mp (P) lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC tại A', B', C'.

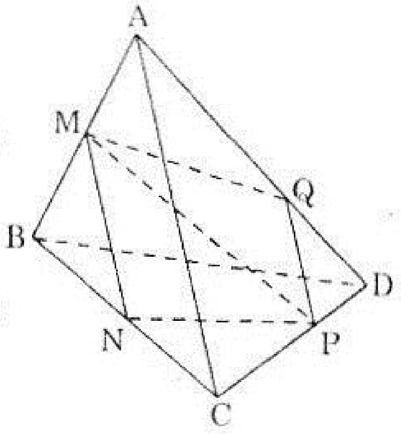
1. Tìm giao điểm D' của SD và mp (P).
2. Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của A'C' và SO.

Chứng minh rằng : $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{2SO}{SI}$.

3. Chứng minh rằng : $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.



- Ta có : $\left.\begin{array}{l} AC \parallel mp\,(P) \\ AC \subset (ABC) \\ \text{và} \quad (ABC) \cap (P) = MN \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel AC \quad (1)$

  Lại có : $\left.\begin{array}{l} AC \parallel mp\,(P) \\ AC \subset (ACD) \\ (ACD) \cap (P) = QP \end{array}\right\} \Rightarrow QP \parallel AC \quad (2)$

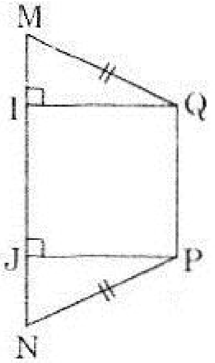
  Từ (1) và (2) suy ra :

  $MN \parallel QP \Rightarrow$ MNPQ là hình thang.

  Ta có : $MN \parallel AC \Rightarrow \Delta BMN \backsim \Delta BAC$

  Mà ΔABC là tam giác đều $\Rightarrow \Delta BMN$ cũng là tam giác đều

  $\Rightarrow BM = BN \Rightarrow AM = NC = \frac{a}{3}$



  Chứng minh tương tự : $DP = DQ = \frac{a}{3}$

  Dễ thấy được $\Delta CNP = \Delta AMQ$ (c.g.c) $\Rightarrow NP = MQ$

  Vậy tứ giác MNPQ là hình thang cân.

- Xét ΔAMQ có : $MQ^2 = AM^2 + AQ^2 - 2AM.AQ.\cos 60^0$

  $$= \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - 2.\frac{a}{3}.\frac{2a}{3}.\frac{1}{2} = \frac{a^2}{3}$$

  Kẻ $QI \perp MN$ tại I và $PJ \perp MN$ tại J.

  $\Rightarrow \Delta IMQ = \Delta JNP \Rightarrow MI = JN \Rightarrow MI = \frac{1}{2}[MN - QP]$

  Mà : $MN = BM = \frac{2a}{3}$ (do ΔBMN là tam giác đều)

  và $QP = DP = \frac{a}{3}$ (do ΔDQP là tam giác đều)

  Vậy $MI = \frac{1}{2}\left[\frac{2a}{3} - \frac{a}{3}\right] = \frac{a}{6}$.

Xét tam giác MIQ vuông tại I cho ta :

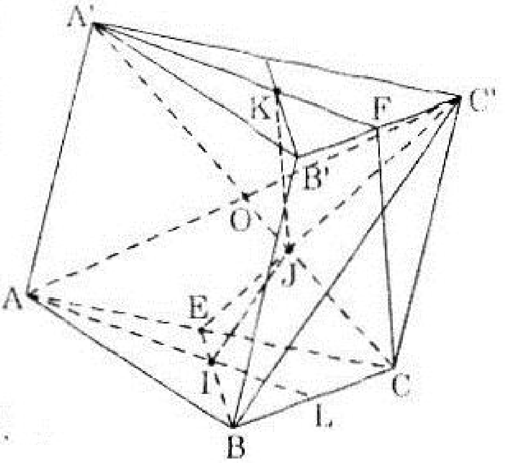
$$QI = \sqrt{MQ^2 - MI^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{36}} = \sqrt{\frac{11a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{11}}{6}$$

Vậy $$S_{MNPQ} = \frac{MN + PQ}{2}.QI = \frac{\frac{2a}{3} + \frac{a}{3}}{2}.\frac{a\sqrt{11}}{6} = \frac{a^2\sqrt{11}}{12}.$$

Bài 2.

1. Gọi E là trung điểm của AC, L là trung điểm của BC, F là trung điểm của B'C'.

Vì I là trọng tâm của ΔABC $\Rightarrow \frac{EI}{EB} = \frac{1}{3}$



Và J là trọng tâm của ΔACC' $\Rightarrow \frac{EJ}{EC'} = \frac{1}{3}$

Suy ra : $\frac{EI}{EB} = \frac{EJ}{EC'} = \frac{1}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow IJ \mathbin{/\mkern-6mu/} BC' \\ \text{Mà } BC' \subset (ABC') \end{array}\right\} \Rightarrow IJ \mathbin{/\mkern-6mu/} (ABC').$$

2. Gọi O là tâm của hình bình hành AA'C'C.

Vì J là trọng tâm của ΔACC' nên có :

$$\frac{CJ}{CO} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CJ}{\frac{1}{2}CA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CJ}{CA'} = \frac{1}{3}$$

Và K là trọng tâm của ΔA'B'C' nên có : $\frac{FK}{FA'} = \frac{1}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \frac{CJ}{CA'} = \frac{FK}{FA'} = \frac{1}{3} \Rightarrow KJ \mathbin{/\mkern-6mu/} CF \\ CF \subset (BB'C'C) \end{array}\right\} \Rightarrow KJ \mathbin{/\mkern-6mu/} (BB'C'C).$$

3. Theo chứng minh trên, ta có :

$$\left.\begin{array}{l} IJ \mathbin{/\mkern-6mu/} BC' \\ \text{Mà } BC' \subset (BB'C'C) \end{array}\right\} \Rightarrow IJ \mathbin{/\mkern-6mu/} (BB'C'C) \quad (a)$$

Mặt khác : JK // (BB'C'C) (b) (do câu a)

Từ (a) và (b) suy ra : (IJK) // (BB'C'C).

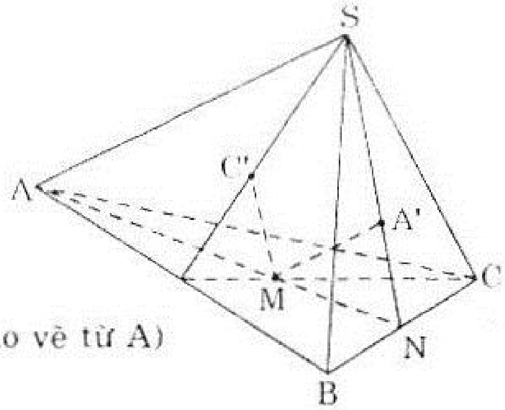
Bài 3.

1. Vì SA // MA' nên hai đường thẳng này xác định một mặt phẳng. Gọi mặt phẳng này là mp (P).

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ta có : } A, M, N \in (P).\\ \text{Mặt khác : } A, M, N \in (ABC)\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow A, M, N \in (P) \cap (ABC)$

$\Rightarrow$ Ba điểm A, M, N thẳng hàng.

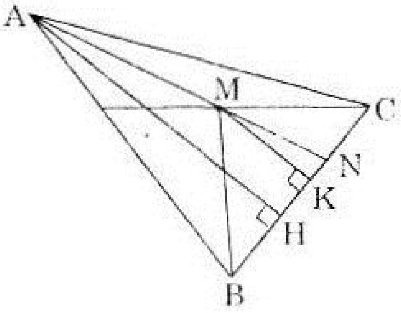


2. Ta có :

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC.AH$ (với AH là đường cao vẽ từ A)

$S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2}BC.MK$ (với MK là đường cao vẽ từ M)

Vì $MK \perp BC$ và $AH \perp BC$ (trong mp (ABC))



$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AH \,//\, MK\\ \Rightarrow \dfrac{MK}{AH} = \dfrac{MN}{NA}\\ \text{Vậy : } \dfrac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{MK}{AH}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \dfrac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{MN}{NA}\\ \text{Mà } MA' \,//\, SA \text{ (giả thiết) } \Rightarrow \dfrac{MN}{NA} = \dfrac{MA'}{SA}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{MA'}{SA}.$$

3. Theo câu 2, ta có : $\dfrac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{MA'}{SA}$

Chứng minh tương tự, ta có : $\dfrac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{MC'}{SC}$; $\dfrac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{MB'}{SB}$.

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} \quad \Rightarrow \frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} = 1.$$

Bài 4.

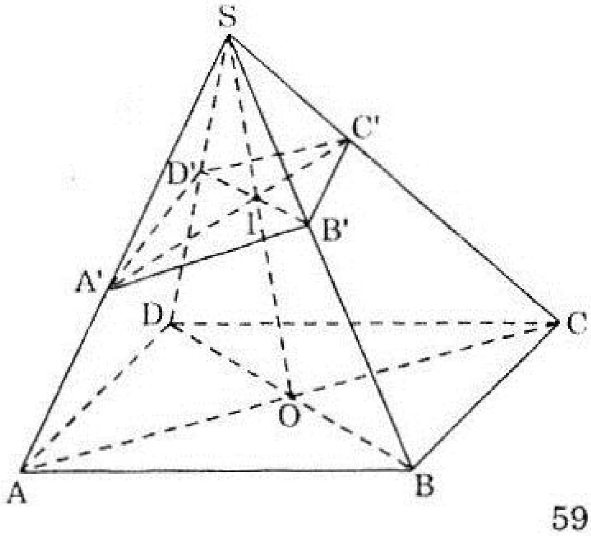
1. Gọi $O = AC \cap BD$

Trong mp (SAC) : $A'C' \cap SO = I$

Trong mp (SBD) : $B'I \cap SD = D'$

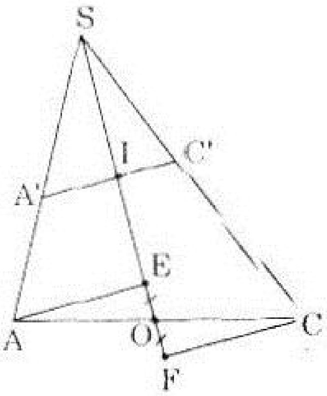
$$\Rightarrow \begin{cases} D' \in SD \\ D' \in B'I;\ B'I \subset (P) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D' \in SD \\ D' \in (P) \end{cases} \Rightarrow D' = SD \cap (P).$$



2. Trong mp (SAC), vẽ AE // A'C' với $E \in SO$

và CF // A'C' với $F \in SO$



Vì : AE // A'I $\Rightarrow \dfrac{SA}{SA'} = \dfrac{SE}{SI} = \dfrac{SO - OE}{SI}$

Vì : CF // IC' $\Rightarrow \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SF}{SI} = \dfrac{SO + OF}{SI}$

Mặt khác có : CF // AE (cùng song song A'C')

$\Rightarrow \dfrac{OE}{OF} = \dfrac{OA}{OC} = 1$ (vì O là trung điểm AC)

$\Rightarrow OE = OF$

Vậy : $\dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SO - OE}{SI} + \dfrac{SO + OF}{SI} = \dfrac{2SO}{SI}$

$\Rightarrow \dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{2SO}{SI}$ (a)

3. Chứng minh tương tự câu trên, ta có :

$\dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'} = \dfrac{2SO}{SI}$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra : $\dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'} = \dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

Câu 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm là O. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau :

A. $(SAC) \cap (SBD) = SO$

B. $(SAB) \cap (SBC) = SB$

C. $(SAB) \cap (SDC) = d$ với d qua S và d song song với AB.

D. $(SAB) \cap (SDC) = d$ với d qua S và d không song song với AB.

Câu 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác BCD và tam giác ACD. Chọn mệnh đề đúng :

A. G_1G_2 // (ABC)

B. $G_1G_2 = \dfrac{1}{2}AB$

C. G_1G_2 cắt BD

D. $G_1G_2 = \dfrac{1}{3}AB$.

Câu 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AD

Gọi N là điểm trên cạnh BD sao cho BN = 2ND. Gọi F = AD ∩ (IJN). Hãy chọn mệnh đề đúng.

A. AF = −2FD

B. AF = 2FD

C. (ABD) ∩ (IJN) = NF với NF không song song với AB.

D. AF = 3FD.

Câu 4. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang (AB // DC). M là điểm trên cạnh AD (với M khác A và D); mp (P) qua M, mp (P) // (SAD).

Thiết diện của S.ABCD cắt bởi mp (P) là :

A. Tam giác đều | B. Tam giác

C. Hình thang | D. Hình bình hành.

Câu 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC. Hãy chọn mệnh đề sai.

A. IJ // (SAC)

B. (SIJ) ∩ (SAC) = d_1 với d_1 qua S và d_1 // AC.

C. IJ và SD là hai đường thẳng chéo nhau.

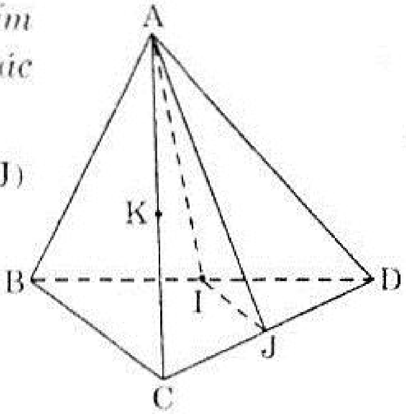
D. (SAB) ∩ (SDC) = d_2 với d_2 qua S và d_2 // IJ.

Câu 6. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành và SD = SB. M và N là hai điểm thay đổi lần lượt trên cạnh SB và SD sao cho SMN là tam giác cân tại S. Mặt phẳng (AMN) thay đổi luôn qua đường thẳng cố định nào ?

A. At với At // BD. | B. AI với I là trung điểm SC.

C. AB | D. AK với K là trung điểm MN.

- *Cho hình tứ diện ABCD, gọi I và J lần lượt là trung điểm của BD và CD; K là trung điểm của AC. Dùng các giả thiết đó để trả lời các câu 7, 8, 9.*



Câu 7. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (AIJ)

A. là đường thẳng d bất kì qua A.

B. là đường thẳng d qua A và d // BC.

C. là đường thẳng KJ.

D. là đường thẳng IK.

Câu 8. BK cắt giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (AIJ) tại L.

Chọn mệnh đề đúng :

A. AB không song song với mp (LCD).

B. AB // (LCD)

C. AI // (LCD)

D. AB // LJ.

Câu 9: Gọi G = LI $\cap$ (ACD). Chọn mệnh đề đúng :

A. K, G và D không thẳng hàng.

B. G là trung điểm của IL.

C. G là trung điểm của AJ.

D. G là trọng tâm ΔACD.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. D 2. A 3. B 4. C 5. D

6. A 7. B 8. B 9. D

Chương II. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ VUÔNG GÓC

CHỦ ĐỀ 12. – Vectơ trong không gian
– Sự đồng phẳng của các vectơ

- *Khái niệm vectơ trong không gian hoàn toàn giống khái niệm vectơ trong mặt phẳng, tuy nhiên lúc đó các vectơ mà ta xem xét đều cùng nằm trong một mặt phẳng còn bây giờ các vectơ mà ta xem xét nằm trong không gian.*
- *Các phép toán cộng hai vectơ – trừ hai vectơ – nhân số thực với một vectơ đều tương tự các phép toán cộng hai vectơ – trừ hai vectơ – nhân số thực với một vectơ trong mặt phẳng.*

Và bây giờ ta nêu ra một vài khái niệm mới :

1. Sự đồng phẳng của các vectơ

- ***Định nghĩa :*** *Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.*
- ***Kết quả :*** *Cho* $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

  Ta có : $\vec{a}$, $\vec{b}$ *và* $\vec{c}$ *đồng phẳng* $\Leftrightarrow$ *O, A, B, C đồng phẳng.*

2. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

- ***Định lí 1 :*** *Cho* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *không cùng phương.*

  Ta có : $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *đồng phẳng* $\Leftrightarrow$ *tồn tại các số m, n sao cho*

  $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ *(các số m, n duy nhất).*
- ***Định lí 2 :*** *Nếu* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *là ba vectơ không đồng phẳng thì với vectơ* $\vec{d}$ *bất kì, ta đều tìm được các số m, n, p sao cho* $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ *(các số m, n, p là duy nhất).*

3. Các kiến thức vận dụng để giải toán

- *Cho ba điểm A, B, C ta luôn có :* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$; $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ *(với I là trung điểm AB, M bất kì)*
- *A, B và C thẳng hàng* $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$ *cùng phương*

  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}, k \in R$.

Bài 1. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì trong không gian. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

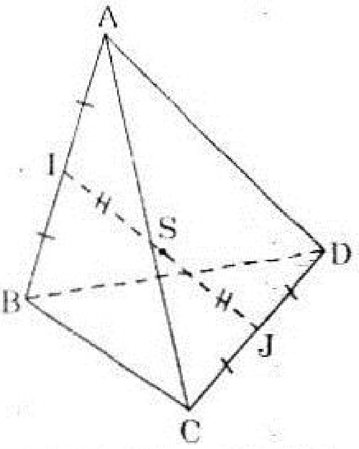
Giải

Ta có : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\underbrace{\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}}_{\vec{0}}$

$$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\vec{0}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}.$$

Bài 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD; S là trung điểm của IJ. Chứng minh rằng : $4\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ với mọi điểm M trong không gian.

Giải



Ta có : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

$=\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{SD}$

$=4\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}$

$=4\overrightarrow{MS}+2\overrightarrow{SI}+2\overrightarrow{SJ}$ (vì I là trung điểm AB, J là trung điểm CD)

$=4\overrightarrow{MS}+2(\overrightarrow{SI}+\overrightarrow{SJ})$

$=4\overrightarrow{MS}+2.\vec{0}=4\overrightarrow{MS}$ (vì S là trung điểm IJ).

Bài 3. Cho tứ diện ABCD. Tìm điểm O sao cho : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. Chứng minh rằng điểm O đó là duy nhất.

Giải

- Gọi I là trung điểm AB, J là trung điểm CD.

  Xét $\underbrace{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}_{2\overrightarrow{OI}}+\underbrace{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}_{2\overrightarrow{OJ}}=\vec{0}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\vec{0}$

  $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OI}$ và $\overrightarrow{OJ}$ là hai vectơ đối nhau.

  $\Rightarrow$ O là trung điểm của đoạn IJ.

  Ngược lại, nếu O là trung điểm IJ ta chứng minh khá dễ dàng

  $$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}.$$

- Giả sử có điểm O_1 sao cho : $\overrightarrow{O_1A}+\overrightarrow{O_1B}+\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1D}=\vec{0}$.

  Khi đó, ta có : $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{O_1O}=\overrightarrow{O_1A}+\overrightarrow{AO}\\ \overrightarrow{O_1O}=\overrightarrow{O_1B}+\overrightarrow{BO}\\ \overrightarrow{O_1O}=\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{CO}\\ \overrightarrow{O_1O}=\overrightarrow{O_1D}+\overrightarrow{DO}\end{array}\right\}$

  Suy ra : $4\overrightarrow{O_1O}=\overrightarrow{O_1A}+\overrightarrow{O_1B}+\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1D}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$

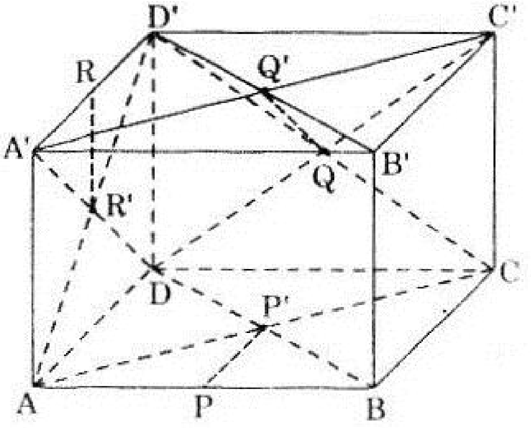
  $=\vec{0}-\vec{0}=\vec{0}$

  $\Rightarrow\ \overrightarrow{O_1O}=\vec{0}\ \Rightarrow\ O_1\equiv O$. Vậy điểm O là duy nhất.

Bài 4. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi P và R lần lượt là trung điểm các cạnh AB và A'D'. Gọi P', Q, Q', R' lần lượt là giao điểm các đường chéo của các mặt ABCD, CDD'C', A'B'C'D' và ADD'A'.

1. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$.
2. Chứng minh rằng hai tam giác PQR và P'Q'R' có cùng trọng tâm.

Giải



1. Ta có :

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{PP'} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{QQ'} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA'}\\ \overrightarrow{RR'} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \frac{1}{2}(\underbrace{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA'}} + \overrightarrow{A'A})$$

$$= \frac{1}{2}\quad(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A}) = \frac{1}{2}\vec{0} = \vec{0}.$$

2. Gọi G là trọng tâm của ΔPQR, ta có : $\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GR} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{GP'} + \overrightarrow{P'P}} + \underbrace{\overrightarrow{GQ'} + \overrightarrow{Q'Q}} + \underbrace{\overrightarrow{GR'} + \overrightarrow{R'R}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GP'} + \overrightarrow{GQ'} + \overrightarrow{GR'} + \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{Q'Q} + \overrightarrow{R'R} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GP'} + \overrightarrow{GQ'} + \overrightarrow{GR'} + (\overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{Q'Q} + \overrightarrow{R'R}) = \vec{0}$$

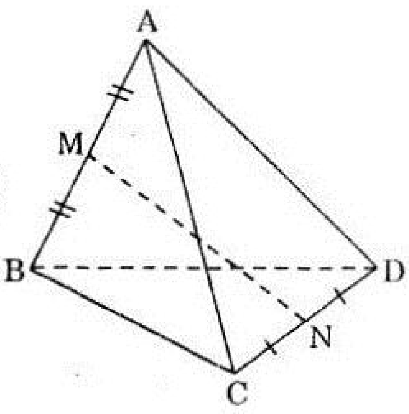
$$\Rightarrow \overrightarrow{GP'} + \overrightarrow{GQ'} + \overrightarrow{GR'} + \vec{0} = \vec{0}\ \text{(do câu a)}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GP'} + \overrightarrow{GQ'} + \overrightarrow{GR'} = \vec{0}$$

⇒ G là trọng tâm của tam giác P'Q'R'.

Bài 5. Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Giải



Vì N là trung điểm của CD nên có :

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = \frac{1}{2}(\underbrace{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}} + \underbrace{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA})$$

Mà M là trung điểm AB ⇒ $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$ ⇒ $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

⇒ Ba vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

Bài 6. Cho tứ diện ABCD. Gọi **M và N lần lượt là** trung điểm các cạnh AB và CD. Gọi P, **Q là các điểm lần lượt nằm trên** các cạnh AD và BC sao cho : $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. **Chứng minh bốn** điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

- ***Chú ý :*** *Để chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng ta thực hiện như sau :*

* *Chứng minh :* $\overrightarrow{MN}=\alpha\overrightarrow{MP}+\beta\overrightarrow{MQ}$ $(\alpha, \beta \in R)$

* *Suy ra* $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ *và* $\overrightarrow{MQ}$ *đồng phẳng, từ đó kết luận bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.*

Giải

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Ta có : } & \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\\ \text{và có : } & \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$

$\quad =\underbrace{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}}+\underbrace{\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN}}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\vec{0}+\vec{0}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ (do M là trung điểm AB, N là trung điểm CD)

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$ **(a)**

Ta lại có theo giả thiết : $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{BQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\end{array}\right.$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{BQ}$ **(b)**

Thay (b) vào (a), ta được : $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(4\overrightarrow{AP}+4\overrightarrow{BQ})$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=2(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ})=2(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MQ})$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=2(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM})$

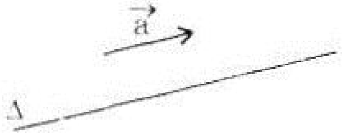
$\quad =2\overrightarrow{MP}+2\overrightarrow{MQ}+\vec{0}$ **(do M là trung điểm AB)**

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MP}+2\overrightarrow{MQ}$

⇒ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{MQ}$ **đồng phẳng** ⇒ **M, N, P, Q** đồng phẳng.

CHỦ ĐỀ 13. Góc giữa hai đường thẳng – Hai đường thẳng vuông góc

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

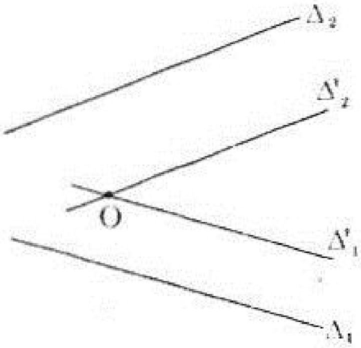


- ***Định nghĩa :*** *Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ và đường thẳng Δ. Ta nói vectơ $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng Δ.*

2. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bất kì trong không gian. Từ điểm O nào đó, ta vẽ hai đường thẳng Δ'_1, Δ'_2 lần lượt song song (hoặc trùng) với Δ_1, Δ_2.

a) Định nghĩa :

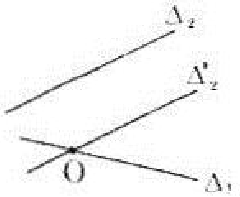


Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong không gian là góc giữa hai đường thẳng Δ'_1 và Δ'_2 cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với Δ_1 và Δ_2.

Kí hiệu : $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$

b) Nhận xét :

(i) Ta có thể chọn điểm O bất kì mà vẫn không thay đổi góc giữa Δ'_1 và Δ'_2, do đó ta vẫn có thể chọn điểm O nằm trên một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ đường thẳng qua O song song với đường thẳng còn lại.



(ii) Gọi $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của (Δ_1)

$\vec{b}$ là vectơ chỉ phương của (Δ_2)

và có $(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$, thì ta có :

$$(\Delta_1, \Delta_2) = \alpha \qquad (\text{nếu } 0^0 \le \alpha \le 90^0)$$

$$\text{hoặc } (\Delta_1, \Delta_2) = 180^0 - \alpha \qquad (\text{nếu } 90^0 \le \alpha \le 180^0)$$

(iii) Nếu $\Delta_1 \parallel \Delta_2$ hoặc $\Delta_1 \equiv \Delta_2$ thì $(\Delta_1, \Delta_2) = 0^0$.

3. Hai đường thẳng vuông góc

a) Định nghĩa :

Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0. Kí hiệu : $a \perp b$; hai đường thẳng a và b vuông góc nhau.

b) Chú ý :

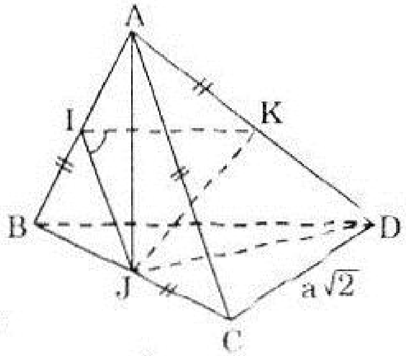
- *Nếu* $\left.\begin{matrix} a \parallel b \\ c \perp a \end{matrix}\right\}$ *thì :* $c \perp b$.
- *Hai đường thẳng vuông góc nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.*

Bài 1. Cho tứ diện ABCD có : AB = AC = AD = BC = BD = a và DC = $a\sqrt{2}$. Tính góc của hai đường thẳng AC và BD.

Giải

Gọi I, J và K lần lượt là trung điểm của AB, BC và AD nên có :

IJ // AC và IK // BD



Vậy $(\widehat{AC,BD}) = (\widehat{IJ,IK})$

Để tính $(\widehat{IJ,IK})$ ta tính góc $\widehat{JIK}$.

Ta có ΔABC là tam giác đều $\Rightarrow AJ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét ΔBDC có DJ là đường trung tuyến nên có :

$$BD^2 + DC^2 = 2DJ^2 + \frac{BC^2}{2} \Leftrightarrow a^2 + (a\sqrt{2})^2 = 2DJ^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow DJ^2 = \frac{5a^2}{4}$$

Lại xét ΔAJD có JK là đường trung tuyến nên có :

$$AJ^2 + DJ^2 = 2JK^2 + \frac{AD^2}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{5a^2}{4} = 2JK^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow JK^2 = \frac{3a^2}{4}$$

Xét ΔJIK, áp dụng định lí hàm số cosin, ta có :

$$JK^2 = IJ^2 + IK^2 - 2IJ.IK.\cos\widehat{JIK}$$

$$\Rightarrow \cos\widehat{JIK} = \frac{IJ^2 + IK^2 - JK^2}{2IJ.IK} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{3a^2}{4}}{2.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\widehat{JIK} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{JIK} = 120^0 \Rightarrow (\widehat{IJ,IK}) = 60^0 \text{ hay } (\widehat{AC,BD}) = 60^0$$

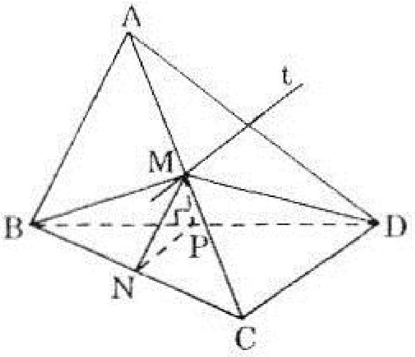
Bài 2. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC và BD.

1. Xác định giao tuyến hai mặt phẳng (MNP) và (ACD).
2. Tính góc của hai đường thẳng AB và CD.

Giải

1. $$\left.\begin{array}{l} \text{Ta có : } M \in (MNP) \cap (ACD) \\ \text{và có : } NP \subset (MNP) \\ \qquad\quad CD \subset (ACD) \end{array}\right\} \Rightarrow (MNP) \cap (ACD) = Mt \text{ với } Mt \,//\, CD$$

2. Vì tam giác ACD và ABC là hai tam giác đều có cạnh là a nên có :



$$DM = BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow \Delta BMD$ là tam giác cân tại M.

$\Rightarrow MP \perp BD$ (vì P là trung điểm của BD)

$\Rightarrow \Delta MPD$ vuông tại P.

$$\Rightarrow MP^2 = MD^2 - PD^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

Ta có : $MN = NP = \frac{a}{2}$

Có : $\left.\begin{matrix} MN // AB \\ NP // CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{(AB, CD)} = \widehat{(NM, NP)}$

Để tính $\widehat{(NM, NP)}$ ta tính góc $\widehat{MNP}$.

Xét ΔMNP ta có : $MP^2 = MN^2 + NP^2 - 2MN.NP.\cos\widehat{MNP}$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{MNP} = \frac{MN^2 + NP^2 - MP^2}{2MN.NP} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}}{2.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}} = 0$$

Vậy $\cos\widehat{MNP} = 0 \Rightarrow \widehat{MNP} = 90^0 \Rightarrow \widehat{(AB, CD)} = 90^0$.

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D biết AD = DC = a, AB = 2a và $SA \perp AB$, $SA \perp AD$ với $SA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

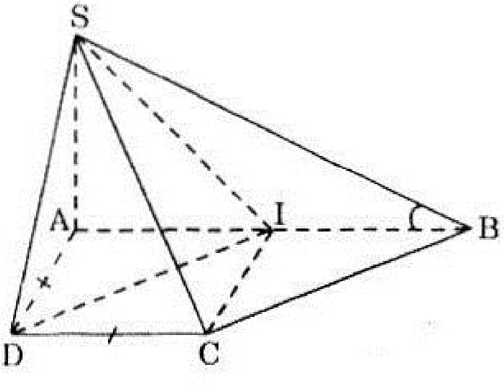
Tính :

1. Góc giữa hai đường thẳng SB và DC.
2. Góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

Giải

1. Ta có : AB // DC $\Rightarrow \widehat{(SB, DC)} = \widehat{(SB, AB)}$

Ta tính góc $\widehat{SBA}$.



Xét ΔSAB vuông tại A có :

$$\tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow \widehat{SBA} = 30^0 \Rightarrow \widehat{(SB, DC)} = 30^0$.

2. Gọi I là trung điểm của AB

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow IB = \dfrac{AB}{2} = a \\ DC = a \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \Rightarrow IB = DC \\ \text{và có } IB \,//\, DC \end{matrix}\Bigg\} \Rightarrow \text{Tứ giác DCBI là hình bình hành..}$$

$\Rightarrow DI \,//\, BC \Rightarrow \widehat{(SD, BC)} = \widehat{(SD, DI)}$

Ta tính góc $\widehat{SDI}$.

$$\text{có : } SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{3} + a^2} = \sqrt{\frac{7a^2}{3}}$$

$$= \frac{a\sqrt{21}}{3} \quad \text{(do } \Delta SAD \text{ vuông tại A)}$$

Tương tự : $SI = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$

Dễ thấy tứ giác AICD là hình vuông cạnh là a $\Rightarrow DI = a\sqrt{2}$.

Xét ΔSDI, ta có : $SI^2 = SD^2 + DI^2 - 2SD.DI.\cos\widehat{SDI}$

$$\Rightarrow \cos\widehat{SDI} = \frac{SD^2 + DI^2 - SI^2}{2SD.DI} = \frac{2a^2}{2.\dfrac{a\sqrt{21}}{3}.a\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{42}}$$

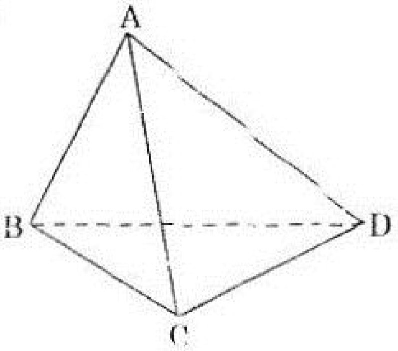
$$\Rightarrow \widehat{SDI} = \arccos\frac{3}{\sqrt{42}} \qquad \Rightarrow \widehat{(SD, BC)} = \arccos\frac{3}{\sqrt{42}}.$$

Bài 4. Cho tứ diện ABCD, có AB ⊥ CD và AC ⊥ DB.
Chứng minh rằng : AD ⊥ BC.

Giải

Xét : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD})$

$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$



Vì : $AB \perp CD \Rightarrow \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CD} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{AC}.(\underbrace{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}} + \overrightarrow{CD})$

$= \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

$= 0$ (do $AC \perp BD$)

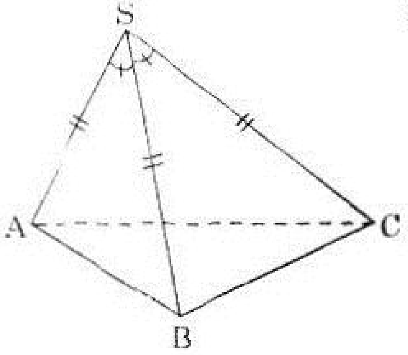
$\Rightarrow \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow AD \perp BC.$

Bài 5. Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$.

Chứng minh rằng : **SA ⊥ BC, SB ⊥ AC** và **SC ⊥ AB**.

Giải

- Chứng minh SA ⊥ BC.



Xét : $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA}.(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB})$ (do $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}$)

$$= \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$$

$$= |\overrightarrow{SA}|.|\overrightarrow{SC}|.\cos\widehat{ASC} - |\overrightarrow{SA}|.|\overrightarrow{SB}|.\cos\widehat{ASB}$$

$$= SA.SC.\cos\widehat{ASC} - SA.SB.\cos\widehat{ASB}$$

$= 0$ (vì SC = SB; $\cos\widehat{ASC} = \cos\widehat{ASB}$)

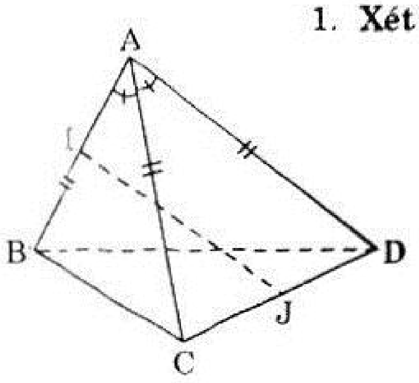
$\Rightarrow \overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow SA \perp BC$.

- Chứng minh tương **tự cho** : **SB ⊥ AC** và SC ⊥ AB.

Bài 6. Cho tứ diện **ABCD có** : **AB = AC = AD** và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0$. Chứng minh rằng :

1. AB ⊥ CD
2. Nếu I và J là **trung điểm của AB và CD thì IJ ⊥ AB và IJ ⊥ CD.**

Giải



1. **Xét** : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD})$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$

$$= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$

$$= -|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\cos\widehat{BAC} + |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AD}|.\cos\widehat{BAD}$$

$$= -AB.AC.\cos\widehat{BAC} + AB.AD.\cos\widehat{BAD}$$

$= 0$ (vì AC = AD và $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} = 60^0$)

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Rightarrow AB \perp CD$.

2. - Chứng minh IJ ⊥ **AB**.

Ta có : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$ (do J là trung điểm CD)

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{ID} \qquad (a)$$

Nhận xét ΔABC **có** : $\hat{A} = 60^0$, AB = AC

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \Delta ABC \text{ đều} \\ \text{mà I là trung điểm AB}\end{array}\right\} \Rightarrow CI \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IC} = 0 \quad (b)$$

Chứng minh tương tự : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{ID} = 0$ (c)

Từ (a), (b), (c) $\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{IJ} \Rightarrow AB \perp IJ$.

- Chứng minh IJ ⊥ CD.

Xét : $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{CD}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB})$ (do I là trung điểm AB)

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{JA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{JB} \quad (d)$$

Nhận xét ΔACD cân tại A, mà J là trung điểm CD

$\Rightarrow \overrightarrow{JA} \perp \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{JA} = 0$ (e)

Ta lại có : ΔABC = ΔABD (c.g.c)

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow BC = BI \\ \text{mà J là trung điểm CD} \end{array}\right\} \Rightarrow BJ \perp CD \Rightarrow \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{JB} = 0 \quad (f)$$

Từ (d), (e), (f) suy ra : $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{JI} = 0 \Rightarrow CD \perp IJ$.

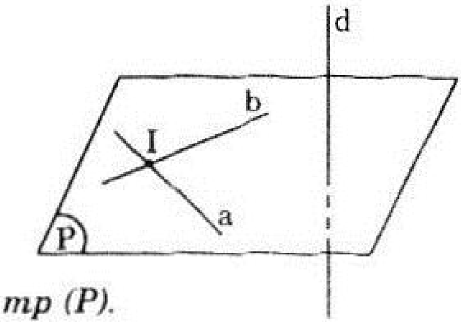
CHỦ ĐỀ 14. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

1. Định nghĩa

Một đường thẳng gọi là vuông góc với mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

Kí hiệu : $a \perp mp\,(P)$ *hoặc* $mp\,(P) \perp a$ *: a và mp (P) vuông góc nhau.*

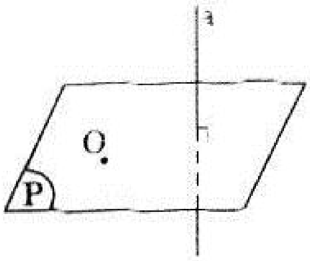
2. Định lí



Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mp (P) thì đường thẳng d vuông góc với mp (P).

Hay : $\left.\begin{array}{l} a, b \subset mp(P) : a \cap b = \{I\} \\ d \perp a,\ d \perp b \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp mp\,(P).$

3. Tính chất

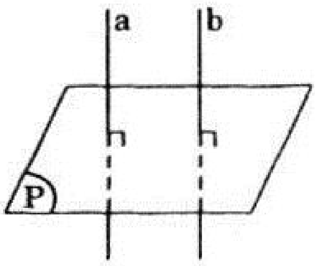


a) Qua một điểm O cho trước có duy nhất một mặt phẳng (P) vuông góc với một đường thẳng a cho trước.

b) Qua một điểm O cho trước có duy nhất một đường thẳng Δ vuông góc với mp (P) cho trước.

4. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc

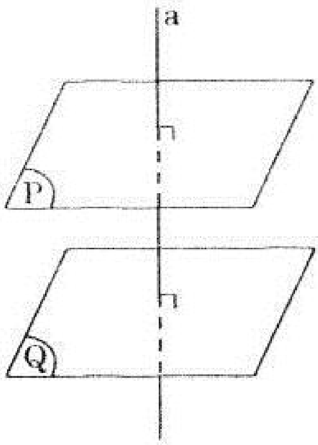
a) $\left.\begin{array}{l} a \,//\, b \\ a \perp mp(P) \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp mp\,(P)$



b) $\left.\begin{array}{l} a \not\equiv b \\ a \perp mp(P) \\ b \perp mp(P) \end{array}\right\} \Rightarrow a \,//\, b$

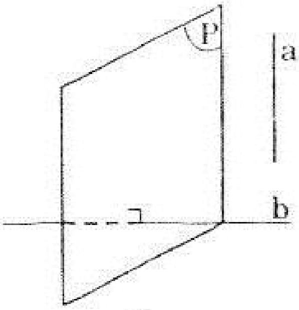
c) $\left.\begin{array}{l} mp(P) \parallel mp(Q) \\ a \perp mp(P) \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp mp(Q)$

d) $\left.\begin{array}{l} mp(P) \not\equiv mp(Q) \\ a \perp mp(P) \\ a \perp mp(Q) \end{array}\right\} \Rightarrow mp(P) \parallel mp(Q)$



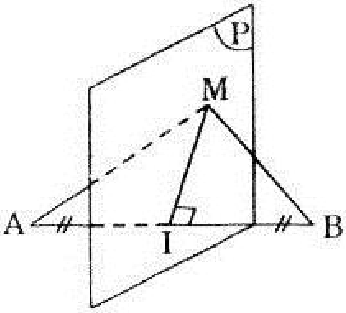
e) $\left.\begin{array}{l} a \parallel mp(P) \\ b \perp mp(P) \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp a$

f) $\left.\begin{array}{l} a \not\subset mp(P) \\ a \perp b \\ b \perp mp(P) \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel mp(P).$



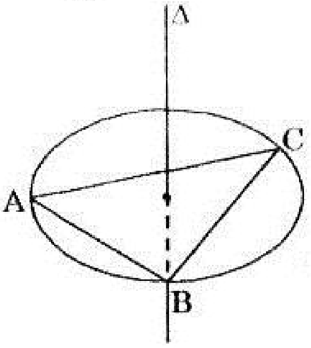
5. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng

- *Mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.*
- *Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.*



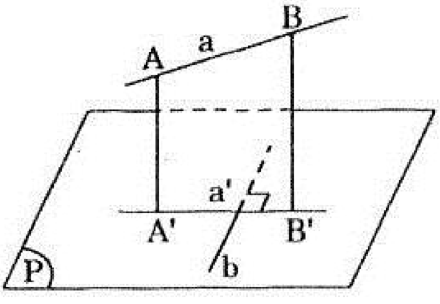
6. Trục của tam giác

- *Tập hợp các điểm M cách đều ba đỉnh của ΔABC là đường thẳng Δ vuông góc mp (ABC) tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.*
- *Đường thẳng Δ đó gọi là trục ΔABC.*



7. Định lí *(ba đường vuông góc)*

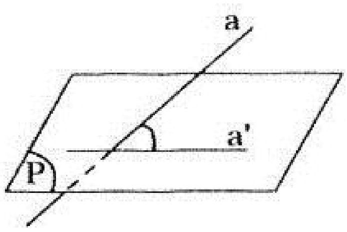
Cho đường thẳng a có hình chiếu trên mp (P) là đường thẳng a' và b là đường thẳng nằm trong mp (P). Ta có : b vuông góc với a khi và chỉ khi b vuông góc với a'.



8. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

a) Định nghĩa

- *Cho đường thẳng a cắt mp (P) tại O và a không vuông góc với mp. (P). Góc giữa đường thẳng a và mp (P) là góc tạo bởi a và hình chiếu vuông góc a' của a trên mp (P).*



- *Nếu a vuông góc mp (P), ta nói góc giữa a và mp (P) bằng 90^0.*

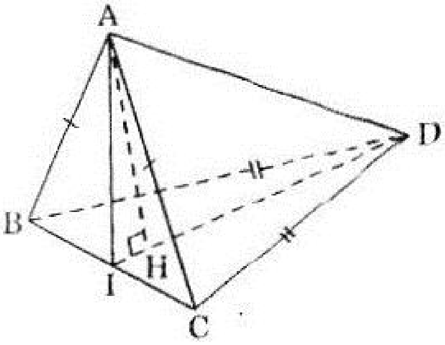
b) Chú ý :

Gọi φ là góc giữa đường thẳng a và mp (P), ta có : $0^0 \le \varphi \le 90^0$.

Bài 1. Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung cạnh đáy BC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

1. Chứng minh $BC \perp (ADI)$.
2. Gọi AH là đường cao của ΔADI. Chứng minh : $AH \perp (BCD)$.

Giải



1. $$\left.\begin{array}{l}\text{Ta có } \Delta ABC \text{ cân tại A.}\\ \text{Mà AI là trung tuyến của } \Delta ABC\end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow AI \perp BC\\ \text{Chứng minh tương tự : } DI \perp BC\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow BC \perp (ADI).$$

2. $$\left.\begin{array}{ll}\text{Ta có : } & BC \perp (ADI)\\ \text{Mà} & AH \subset (ADI)\end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow AH \perp BC\\ \text{Mà có : } AH \perp DI\end{array}\right\} \Rightarrow \quad AH \perp (BCD).$$

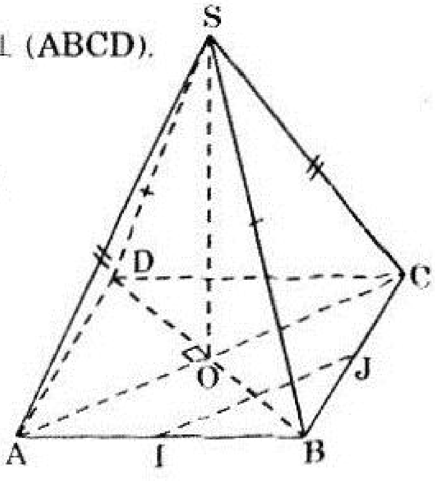
Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Biết SA = SC, SB = SD. Chứng minh rằng :

1. $SO \perp (ABCD)$
2. $IJ \perp (SBD)$.

Giải

1. Ta có : SA = SC

$\Rightarrow \Delta SAC$ cân tại S và có SO là đường trung tuyến của ΔSAC
$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow SO \perp AC\\ \text{Chứng minh tương tự có : } SO \perp BD\end{array}\right\} \Rightarrow SO \perp (ABCD).$$



2. $$\left.\begin{array}{l}\text{Ta có : } IJ \,//\, AC \text{ (do IJ là đường}\\ \qquad\text{trung bình của } \Delta ABC)\\ \text{Mà } AC \perp BD\end{array}\right\} \Rightarrow IJ \perp BD$$
$$\left.\begin{array}{ll}\text{Mặt khác : } & SO \perp (ABCD)\\ & IJ \subset (ABCD)\end{array}\right\} \Rightarrow IJ \perp SO$$
$$\left.\begin{array}{ll}\text{Vậy có : } & IJ \perp BD\\ & IJ \perp SO\end{array}\right\} \Rightarrow IJ \perp (SBD).$$

Bài 3. Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB và OC đôi một vuông góc nhau Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O tới mp (ABC).

Chứng minh rằng :

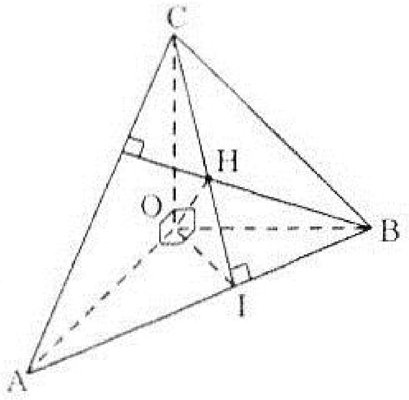
1. H là trực tâm của ΔABC.
2. $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

3. ΔABC là tam giác nhọn.

4. $(\text{dt } ABC)^2 = (\text{dt } OAB)^2 + (\text{dt } OBC)^2 + (\text{dt } OAC)^2$.

(Kí hiệu : dt ABC là diện tích của ΔABC).

Giải



1. Ta có : $\left.\begin{array}{l} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{array}\right\}$ (giả thiết)

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow OC \perp (OAB) \\ \text{Mà } AB \subset (OAB) \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp OC.$

Mặt khác : $\left.\begin{array}{r} OH \perp (ABC) \\ \text{Mà } AB \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp OH$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vậy có : } \left.\begin{array}{l} AB \perp OC \\ AB \perp OH \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \Rightarrow AB \perp (OCH) \\ \text{Mà } CH \subset (OCH) \end{array}\right\} \\ \Rightarrow AB \perp CH \\ \text{Chứng minh tương tự ta có : } AC \perp BH \end{array}\right\}$$

⇒ H là trực tâm của ΔABC.

2. Gọi I là giao điểm của CH và AB.

$\left.\begin{array}{ll} \text{Ta có : } & CO \perp (OAB) \text{ (chứng minh trên)} \\ \text{Mà} & OI \subset (OAB) \end{array}\right\}$

⇒ CO ⊥ OI hay ΔOCI vuông tại O có đường cao là OH, vậy có :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OC^2} \qquad (1)$$

Mặt khác ΔOAB vuông tại O

Và : $\left.\begin{array}{l} AB \perp (OCH) \\ OI \subset (OCH) \end{array}\right\} \Rightarrow OI \perp AB$

Vậy ΔOAB vuông tại O và có OI là đường cao, nên có :

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được : $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

3. Ta có : $AB^2 = OA^2 + OB^2$ (do ΔOAB vuông tại O)

$AC^2 = OA^2 + OC^2$ (do ΔOAC vuông tại O)

$BC^2 = OB^2 + OC^2$ (do ΔOBC vuông tại O)

Ta lại có :

$$\cos\widehat{CAB} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{OA^2 + OB^2 + OA^2 + OC^2 - (OB^2 + OC)^2}{2AB.AC}$$

$$= \frac{OA^2}{AB.AC} > 0$$

⇒ $\widehat{CAB}$ là góc nhọn.

Chứng minh tương tự : $\widehat{BCA}$ và $\widehat{CBA}$ là góc nhọn ⇒ ΔABC là tam giác nhọn.

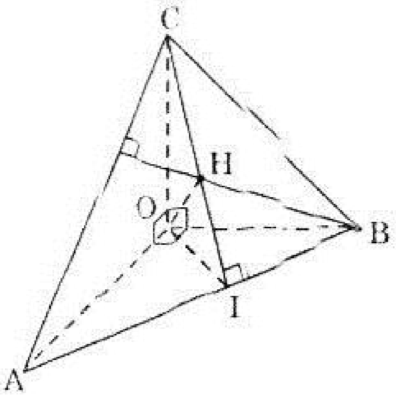
4. Ta có : $(\text{dt } OAB)^2 + (\text{dt } OBC)^2 + (\text{dt } OCA)^2$

$$= \frac{1}{4}OI^2.AB^2 + \frac{1}{4}OB^2.OC^2 + \frac{1}{4}OC^2.OA^2$$

$$= \frac{1}{4}OI^2.AB^2 + \frac{1}{4}OC^2[OB^2 + OA^2]$$

$$= \frac{1}{4}OI^2.AB^2 + \frac{1}{4}OC^2.AB^2 = \frac{1}{4}AB^2.(OI^2 + OC^2)$$

$$= \frac{1}{4}AB^2.CI^2 = \left(\frac{1}{2}CI.AB\right)^2 = (\text{dt } ABC)^2$$

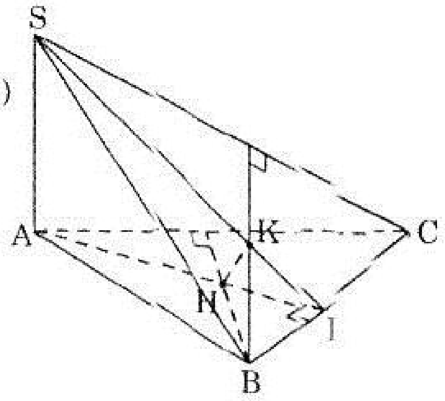


Vậy có : $(\text{dt } ABC)^2 = (\text{dt } OAB)^2 + (\text{dt } OBC)^2 + (\text{dt } OCA)^2$

Bài 4. Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$ và ΔABC không vuông. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các ΔABC, ΔSBC. Chứng minh rằng :

1. AH, SK và BC đồng quy.
2. $SC \perp (BHK)$
3. $HK \perp (SBC)$.

Giải



1. Gọi $I = AH \perp BC \Rightarrow AI \perp BC$

Ta có AI là hình chiếu của SI trên mp (ABC)

Mà $AI \perp BC$

⇒ $SI \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc)

⇒ SI là đường cao của ΔSBC

Mà K là trực tâm của ΔSBC

⇒ SK qua điểm I

Vậy AH, SK và BC đồng quy tại I.

2.
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll}\text{Ta có :} & SA \perp (ABC)\\ \text{Mà} & BH \subset (ABC)\end{array}\right\} \Rightarrow BH \perp SA\\ \text{Mà có } BH \perp AC \text{ (do H là trực tâm của } \Delta ABC)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll} & \Rightarrow BH \perp (SAC)\\ \text{Mà} & SC \subset (SAC)\end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp BH\\ \text{Mà có } SC \perp BK \text{ (do K là trực tâm của } \Delta SBC)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow SC \perp (BHK).$$

3.
$$\left.\begin{array}{ll}\text{Ta có :} & BC \perp AI \text{ (AI là đường cao của } \Delta ABC)\\ & BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABC))\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} & \Rightarrow BC \perp (SAI)\\ \text{Mà} & HK \subset (SAI)\end{array}\right\} \Rightarrow HK \perp BC$$

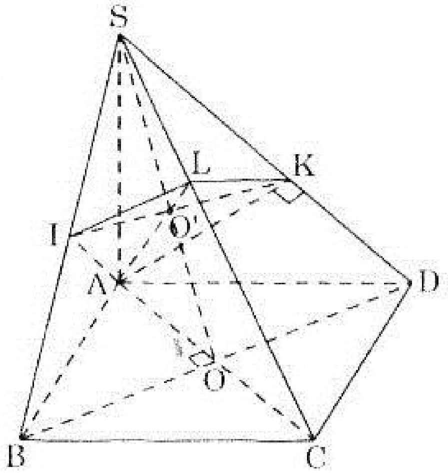
$$\left.\begin{array}{l}\text{Mặt khác : } SC \perp (BHK) \text{ (chứng minh câu 2)}\\ \text{Mà } HK \subset (BHK)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow HK \perp SC\\ \text{Mà đã có : } HK \perp BC\end{array}\right\} \Rightarrow HK \perp (SBC).$$

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, có $SA \perp (ABCD)$ sao cho $SA = a\sqrt{2}$. Từ A vẽ AI vuông góc SB tại I, vẽ AK vuông góc SD tại K.

1. Chứng minh rằng : $SC \perp (AIK)$ và $BD \,//\, (AIK)$.
2. Xác định giao điểm L của SC và mặt phẳng (AIK).
3. Tính diện tích tứ giác AILK.
4. Tính góc giữa đường thẳng SC và mp (ABCD).

Giải



1.• Ta có : $\left.\begin{array}{l}SA \perp (ABCD)\\ BC \subset (ABCD)\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}\Rightarrow BC \perp SA\\ \text{và có } BC \perp AB\end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow BC \perp (SAB)\\ \text{Mà : } AI \subset (SAB)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AI \perp BC\\ \text{lại có : } AI \perp SB \text{ (giả thiết)}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AI \perp (SBC)\\ \text{mà : } SC \subset (SBC)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow SC \perp AI\\ \text{Chứng minh tương tự có : } SC \perp AK\end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp (AIK).$$

• Ta có : AC là hình chiếu của đường thẳng SC trên mp (ABCD)

mà $BD \perp AC$ (vì ABCD là hình vuông)

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow BD \perp SC \text{ (Định lí 3 đường vuông góc)}\\ \text{Mà theo chứng minh trên : } SC \perp (AIK)\end{array}\right\} \Rightarrow BD \,//\, (AIK).$$

2. Trong (SBD) : SO cắt IK tại O'

Trong (SAC) : AO' cắt SC tại L

$$\Rightarrow \begin{cases} L \in SC\\ L \in AO',\ A'O \subset (AIK)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L \in SC\\ L \in (AIJ)\end{cases} \Rightarrow L = SC \cap (AIJ).$$

3. Xét ΔSAB vuông tại A và có AI là đường cao, nên có :

$$SA^2 = SI.SB \quad \Rightarrow \frac{SI}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + a^2} = \frac{2}{3} \qquad (1)$$

Tương tự, ΔSAD vuông tại A và có AK là đường cao nên có : $\dfrac{SK}{SD} = \dfrac{2}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) cho : $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD} \Rightarrow IK // BD$

$$\Rightarrow \frac{IK}{BD} = \frac{SI}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow IK = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Theo chứng minh câu 1, ta có : } SC \perp (AIK)\\ \text{mà } AL \subset (AIK)\end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp AL \text{ tại } L$$

Vậy ΔSAC vuông, có đường cao là AL, nên có :

$$\frac{1}{AL^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AL^2 = a^2 \Rightarrow AL = a$$

$$\text{Mặt khác : }\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}BD \perp AC \text{ (tính chất hình vuông)}\\ BD \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD))\end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)\\ \text{Mà } IK // BD \text{ (chứng minh trên)}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow IK \perp (SAC)\\ \text{Mà } AL \subset (SAC)\end{array}\right\} \Rightarrow IK \perp AL.$$

$$\text{Vậy : } S_{AILK} = S_{\Delta IAL} + S_{\Delta KAL} = \frac{1}{2}IO'.AL + \frac{1}{2}KO'.AL$$

$$= \frac{1}{2}AL(IO' + O'K) = \frac{1}{2}AL.IK = \frac{1}{2}a.\frac{2}{3}a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}.$$

4. Ta có AC là hình chiếu của SC trên mp (ABCD).

Vậy góc giữa SC và mp (ABCD) là góc giữa đường thẳng SC và AC.

Gọi φ là góc giữa SC và AC.

Xét ΔSAC vuông tại A có : $SA = AC = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại A $\Rightarrow \widehat{SCA} = 45^0 \Rightarrow \varphi = 45^0$.

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mp (ABCD) bằng 45^0.

TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thoi và có cạnh SA vuông góc với (ABCD). Gọi I và K là hai điểm lần lượt lấy trên hai cạnh SB và SD sao cho : $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD}$. Chứng minh rằng :

1. BD vuông góc với SC.
2. IK vuông góc với mặt phẳng (SAC).

Bài 2. Cho tứ diện S.ABC có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có tam giác ABC vuông tại B. Trong mặt phẳng (SAB) kẻ AM vuông góc với SB tại M. Trên cạnh SC lấy điểm N sao cho : $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}$.

Chứng minh rằng :

1. $BC \perp (SAB)$ và $AM \perp (SBC)$.
2. $SB \perp AN$.

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thoi tâm O, có $\hat{A} = 60^0$. Cho biết $SO \perp (ABCD)$.

1. Trên BC lấy điểm I sao cho $BI = \frac{1}{4}BC$.

   Chứng minh rằng : $BC \perp (SOI)$.
2. Từ O vẽ $OH \perp SI$ tại H.

   Chứng minh rằng : $(dt\ OBC)^2 = (dt\ HBC).(dt\ SBC)$.

Bài 4. Trong mp (P) cho hình thoi ABCD có tâm là O, $\hat{A} = 60^0$. Trên đường thẳng d vuông góc mp (ABCD) tại O, lấy điểm S ($S \neq O$). Gọi M là trung điểm của cạnh BC và I là trung điểm của BM.

1. Chứng minh : $DB \perp SC$.
2. Chứng minh : $BC \perp (SOI)$.
3. Gọi J là giao điểm của OI và AD. Xác định hình chiếu vuông góc L của J trên mp (SBC). Suy ra : $JL.SI = SO.IJ$.
4. Giả sử hình thoi ABCD có cạnh là a và $SO = \frac{3a}{4}$. Chứng minh rằng L là trung điểm của SI.

Bài 5. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Gọi d là đường thẳng vuông góc với (ABC) vẽ từ A. Lấy M là điểm bất kì thuộc đường thẳng d với $M \neq A$. Gọi K là trực tâm của ΔMBC và Δ là đường thẳng qua K và $\Delta \perp (MBC)$.

1. Chứng minh Δ đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên d.
2. Cho biết Δ cắt d tại N. Chứng minh : $BN \perp CM$.

   Xác định vị trí của điểm M trên đường thẳng d để đoạn MN có độ dài bé nhất.

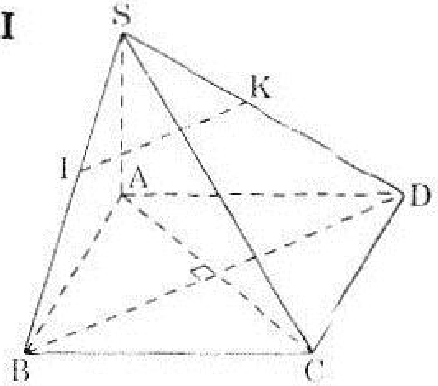
Bài 6. Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$ sao cho $SA = a\sqrt{2}$. Đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh AB = a. Gọi O là trung điểm của BC.

1. Chứng minh rằng : $SO \perp BC$.
2. Gọi M là điểm trên cạnh AB (với $M \neq A$ và $M \neq B$). Qua M dựng mp (P) vuông góc với AO lần lượt cắt các cạnh AC, SC, SB tại N, P, Q. Tứ giác MNPQ là hình gì ?
3. Đặt AM = x ($0 < x < a$). Tính diện tích tứ giác MNPQ theo a và x. Tìm x để diện tích tứ giác MNPQ lớn nhất.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại C. Trên nửa đường thẳng At vuông góc với (ABC) tại A, ta lấy điểm $S \neq A$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC.

1. Chứng minh rằng : $KH \perp SB$.
2. Chứng minh rằng : $SK.SC = SH.SB$.
3. Giả sử S là điểm di động trên nửa đường thẳng At (với $S \neq A$). Chứng minh rằng đường thẳng HK đi qua một điểm cố định.

HƯỚNG DẪN GIẢI



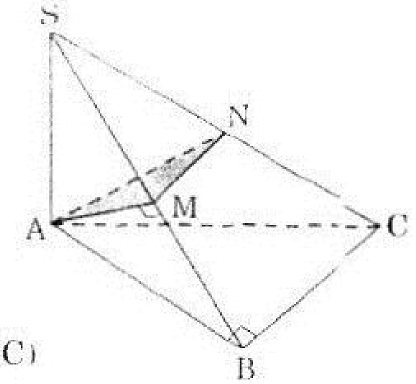
Bài 1.

1. Chứng minh $BD \perp (SAC)$
2. $IK \parallel BD$.

Bài 2.

1.• $$\left.\begin{array}{l}\text{Có } SA \perp (ABC)\\ BC \subset (ABC)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow BC \perp SA\\ \text{và có : } BC \perp AB\end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$



• Theo chứng minh trên :

$$\left.\begin{array}{l}BC \perp (SAB)\\ AM \subset (SAB)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow AM \perp BC\\ \text{Và có : } AM \perp SB \text{ (giả thiết)}\end{array}\right\} \Rightarrow AM \perp (SBC)$$

2. $$\left.\begin{array}{r}\text{Ta có : } \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SC} \Rightarrow MN \parallel BC\\ \text{Mà} \quad BC \perp (SAB)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\Rightarrow MN \perp (SAB)\\ \text{Mà : } SB \subset (SAB)\end{array}\right\} \Rightarrow \quad SB \perp MN\\ \text{Mà có : } \quad SB \perp AM \text{ (giả thiết)}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow SB \perp (AMN)\\ \text{Mà : } AN \subset (AMN)\end{array}\right\} \Rightarrow \quad SB \perp AN.$$

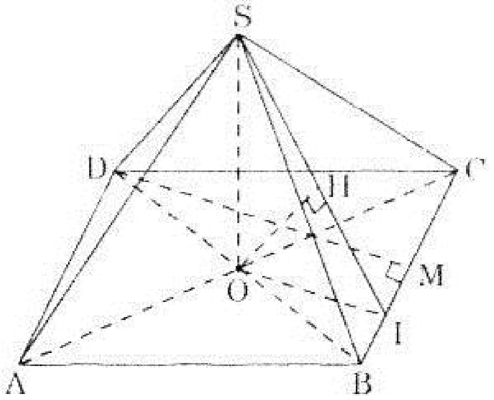
Bài 3.

1. Gọi M là trung điểm của BC.

Mà $BI = \dfrac{1}{4}BC = \dfrac{1}{4}(2.BM) = \dfrac{1}{2}BM \Rightarrow$ I là trung điểm của BM.

Nhận xét : ΔDBC là tam giác đều, mà DM là trung tuyến của ΔDBC

$\Rightarrow DM \perp BC$.



Mà OI là đường trung bình của ΔDMB

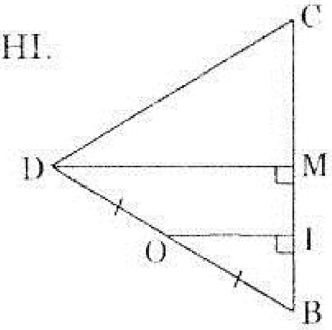
$\Rightarrow OI \,//\, DM \Rightarrow OI \perp BC$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Mặt khác : } SO \perp (ABCD)\\ \text{Mà } BC \subset (ABCD)\end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp SO$$

$$\text{Vậy có : }\left\{\begin{array}{l}BC \perp OI\\ BC \perp SO\end{array}\right. \Rightarrow BC \perp (SOI).$$

2. Theo chứng minh trên ta có :

$$\left.\begin{array}{l}BC \perp (SOI)\\ \text{mà } SI \subset (SOI)\end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp SI \text{ hay cũng có } BC \perp HI.$$



$$\text{Xét : (dt HBC).(dt SBC)} = \frac{1}{2}HI.BC.\frac{1}{2}SI.BC$$

$$= \frac{1}{4}BC^2.HI.SI \quad (a)$$

Mà ΔSOI vuông tại O, có đường cao OH $\Rightarrow OI^2 = HI.SI$ (b)

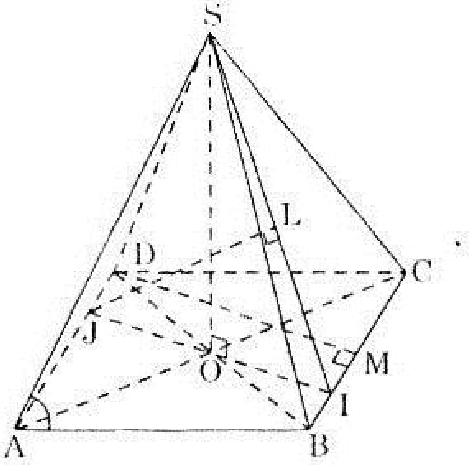
Thay (b) vào (a), ta được :

$$\text{(dt HBC).(dt SBC)} = \frac{1}{4}BC^2.OI^2 = \left(\frac{1}{2}BC.OI\right)^2 = \text{(dt OBC)}^2$$

Vậy ta có : $\text{(dt OBC)}^2 = \text{(dt HBC).(dt SBC)}$.

Bài 4.

1. Dùng định lí ba đường vuông góc.
2. Chứng minh tương tự bài 3.
3. Từ J kẻ $JL \perp SI$ tại L.



Ta có : $BC \perp (SOI)$ (cmt)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Mà } JL \subset (SOI)\\ \Rightarrow JL \perp BC\\ \text{Mà có : } JL \perp SI \text{ (cách dựng)}\end{array}\right\} \Rightarrow JL \perp (SBC)$$

Vậy L là hình chiếu vuông góc của J trên mp (SBC).

Xét ΔSJI, ta có : SO là đường cao vẽ từ S, JL là đường cao vẽ từ J.

$$\Rightarrow \text{dt}(\Delta SJI) = \frac{1}{2}SO.IJ = \frac{1}{2}JL.SI \Rightarrow SO.IJ = JL.SI.$$

4. Nhận xét : ΔDBC là tam giác đều. Mà DM là đường trung tuyến

$$\Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

OI là đường trung bình của ΔDBM

$$\Rightarrow OI = \frac{1}{2}DM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow JI = 2OI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{(do O là tâm đối xứng của ABCD).}$$

Xét ΔSJO vuông tại O, ta có :

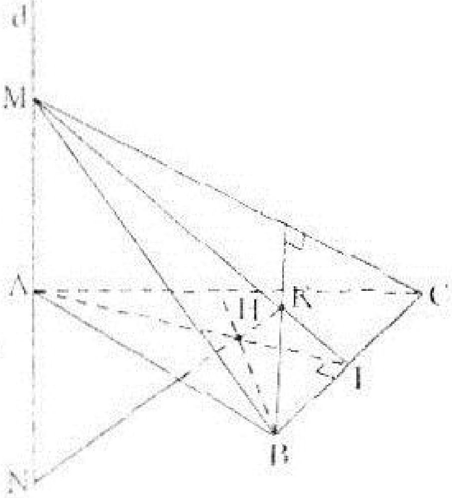
$$SJ = \sqrt{SO^2 + OJ^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{16} + \frac{3a^2}{16}} = \sqrt{\frac{12a^2}{16}}$$

$$= \frac{2a\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Vậy có : } SJ = IJ \Rightarrow \Delta SJI \text{ cân tại } J\\ \text{Mà có } JL \text{ là đường cao}\end{array}\right\} \Rightarrow JL \text{ là trung tuyến của } \Delta SJI.$$

$$\Rightarrow L \text{ là trung điểm của } SI.$$

Bài 5.



1. Gọi I là trung điểm của BC.

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AI \perp BC \text{ tại } I\\ \text{và có : } AM \perp BC \text{ (do } d \perp (ABC))\end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow BC \perp (AMI)\\ \text{Mà : } MI \subset (AMI)\end{array}\right\} \Rightarrow MI \perp BC$$

$\Rightarrow$ K thuộc MI (do K là trực tâm của ΔMBC).

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\text{Nhận xét : có } \Delta \perp (MBC)\\ BC \subset (MBC)\end{array}\right| \Rightarrow \Delta \perp BC\\ \text{mà } BC \perp (MAI)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \Delta \,//\, (MAI) \text{ hoặc } \Delta \subset (MAI)\\ \text{Mà } \Delta \text{ và } (MAI) \text{ có điểm chung là } K\end{array}\right| \Rightarrow \Delta \subset (MAI)$$

Trong mp (MAI), Δ cắt AI tại H.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\text{Ta có : } \Delta \perp (MBC)\\ MC \subset (MBC)\end{array}\right\} \Rightarrow MC \perp \Delta\\ \text{và có : } BK \perp MC \text{ (do K là trực tâm của } \Delta MBC)\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow MC \perp (BHK)\\ \text{Mà : } BH \subset (BHK)\end{array}\right\} \Rightarrow BH \perp MC\\ \text{và có } BH \perp MA \text{ (do } d \perp (ABC))\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow BH \perp (MAC)\\ \text{Và : } AC \subset (MAC)\end{array}\right\} \Rightarrow BH \perp AC\\ \text{Mặt khác } AH \perp BC\end{array}\right\}$$

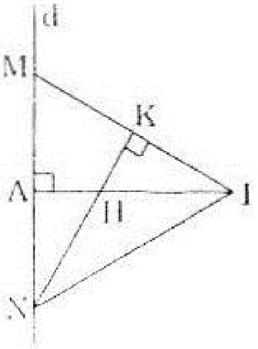
$\Rightarrow$ H là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow$ H cố định.

Vậy Δ qua điểm cố định H là trực tâm của ΔABC.

2. Theo chứng minh trên ta có : $\left.\begin{array}{r} MC \perp (BHK) \\ \text{Mà } \; BN \subset (BHK) \end{array}\right\} \Rightarrow MC \perp BN.$

Ta có : $\Delta AMI \backsim \Delta AHN$

$$\Rightarrow \frac{AH}{AM} = \frac{AN}{AI} \Rightarrow AM.AN = AH.AI$$



Do ΔABC là tam giác đều nên có :

$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{và} \quad AH = \frac{2}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow AM.AN = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2}{6} = \frac{a^2}{2}.$$

Mà $\quad MN = MA + AN \geq 2\sqrt{MA.AN}$ (Bất đẳng thức Cauchy)

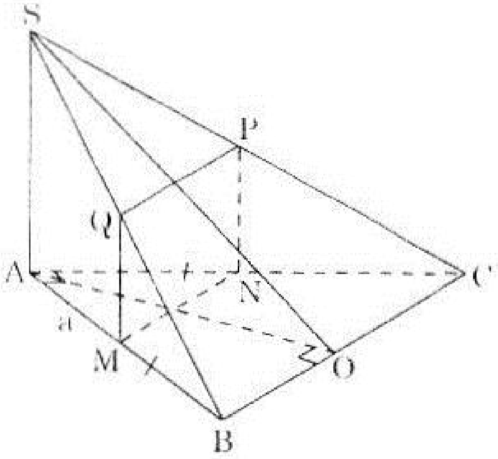
$$\Leftrightarrow MN \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2} \quad (*)$$

Dấu "=" xảy ra cho (*) $\Leftrightarrow MA = AN$

Vậy phải có : $\begin{cases} MA = AN \\ MN = MA + AN = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow MA = AN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tóm lại độ dài MN bé nhất ứng với $MA = AN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bài 6.



1. Ta có : $\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp SA$

Mặt khác ΔABC vuông cân tại A có AO là trung tuyến $\Rightarrow AO \perp BC$.

Vậy có : $\left.\begin{array}{l} BC \perp SA \\ BC \perp AO \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} BC \perp (SAO) \\ SO \subset (SAO) \end{array}\right.$

$$\Rightarrow BC \perp SO.$$

2. Ta có : $\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ AO \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow SA \perp AO$

$\left.\begin{array}{r} SA \perp AO \\ \text{và có : } \; BC \perp AO \\ \text{Mặt khác : } mp(P) \perp AO \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} SA \,//\, mp(P) \\ BC \,//\, mp(P) \end{cases}$

Xét : $\left.\begin{array}{l} SA \,//\, mp(P) \\ SA \subset (SAB) \text{ và } (SAB) \cap (P) = MQ \end{array}\right\} \Rightarrow MQ \,//\, SA$

$$\text{Lại có : }\left.\begin{array}{l} SA \,//\, mp\,(P) \\ SA \subset (SAC) \text{ và } (SAC) \cap (P) = NP \end{array}\right\} \Rightarrow NP \,//\, SA$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow MQ \,//\, NP \\ \text{Xét : } BC \,//\, mp\,(P)\text{, chứng minh tương tự ta được : } QP \,//\, MN \end{array}\right\}$$

⇒ MNPQ là hình bình hành.

$$\text{Mặt khác : }\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABCD) \\ BC \subset (ABCD) \end{array}\right| \Rightarrow SA \perp BC \text{ và có : } SA \,//\, MQ;\ MN \,//\, BC$$

$$\Rightarrow (\widehat{MQ, MN}) = (\widehat{SA, BC}) = 90^0 \Rightarrow \text{MNPQ là hình chữ nhật.}$$

3. Ta có : MQ // SA $\Rightarrow \dfrac{MQ}{SA} = \dfrac{BM}{BA} = \dfrac{AB - AM}{AB} = 1 - \dfrac{x}{a}$

$$\Rightarrow MQ = SA\left(1 - \frac{x}{a}\right) = a\sqrt{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

Mặt khác : MN // BC $\Rightarrow \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{x}{a}$

$$\Rightarrow MN = BC\frac{x}{a} = \frac{x.a\sqrt{2}}{a} = x\sqrt{2}$$

Ta có : $\text{dt (MNPQ)} = MQ.MN = a\sqrt{2}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right)x\sqrt{2}$

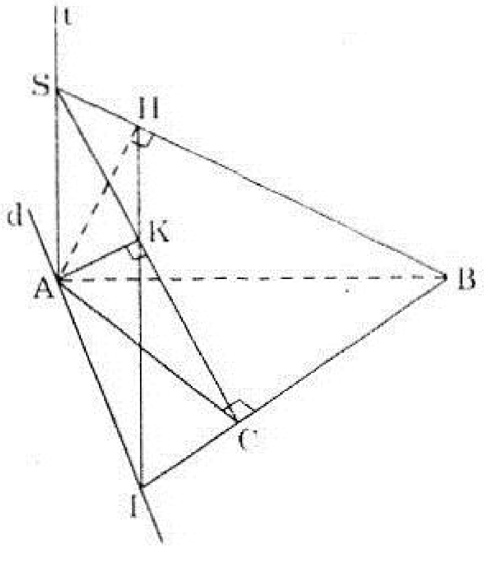
$$= 2x(a - x) \leq 2\left(\frac{x + a - x}{2}\right)^2 \quad \text{(BĐT Cauchy)}$$

$$\leq \frac{a^2}{2} \ (*)$$

Dấu "=" xảy ra cho (*) $\Leftrightarrow x = a - x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

Vậy dt (MNPQ) lớn nhất ứng với $x = \dfrac{a}{2}$.

Bài 7.



1. Ta có : $\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} BC \perp SA \\ \text{và có : } BC \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} BC \perp (SAC) \\ \text{có : } AK \subset (SAC) \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AK \perp BC \\ \text{mà } AK \perp SC \end{array}\right\} \Rightarrow AK \perp (SBC)$, mà $SB \subset (SBC)$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow SB \perp AK \\ \text{Mà có : } SB \perp AH \text{ (giả thiết)} \end{array}\right\} \Rightarrow SB \perp (AHK)$, mà $HK \subset (AHK)$

$\Rightarrow SB \perp HK$.

2. Xét ΔSAC vuông tại A, có AK là đường cao, nên có :

$$SA^2 = SK.SC \qquad (a)$$

Tương tự, ΔSAB vuông tại A, có AH là đường cao, nên có :

$$SA^2 = SH.SB \qquad (b)$$

Từ (a) và (b) cho : $SK.SC = SH.SB$.

3. Ta có HK và BC là hai đường thẳng phân biệt nằm trong mp (SBC)

$\Rightarrow$ HK // BC hoặc HK cắt BC tại I.

Giả sử HK // BC, mà $BC \perp SC$ (do $BC \perp (SAC)$ và có $SC \subset (SAC)$)

$\Rightarrow HK \perp SC$ tại K $\Rightarrow \widehat{SKH} = 90^0$

Mặt khác : $SB \perp AH$ (chứng minh câu 1) $\Rightarrow \widehat{SHK} = 90^0$

Vậy ΔSHK có hai góc vuông (vô lí) $\Rightarrow HK \cap BC = I$.

Gọi d là đường thẳng qua hai điểm A và I.

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow d \subset (AHK) \\ \text{Mà } SB \perp (AHK) \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp SB$ và có $d \perp SA$ (do $SA \perp (ABC)$)

$\Rightarrow d \perp (SAB)$ hay $d \perp (At, AB)$ cố định, d lại qua A cố định

$\Rightarrow$ d là đường thẳng cố định.

Ta có d và BC cố định và hai đường thẳng này có điểm chung là I

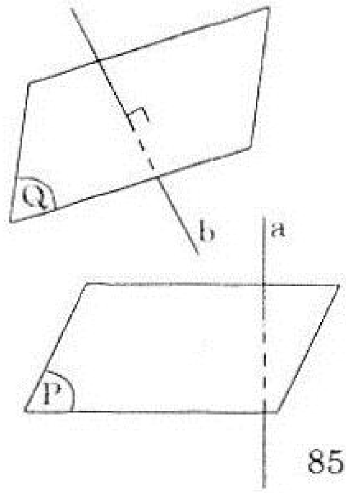
$\Rightarrow$ I cố định.

Mà HK qua I $\Rightarrow$ đường thẳng HK qua một điểm cố định là I.

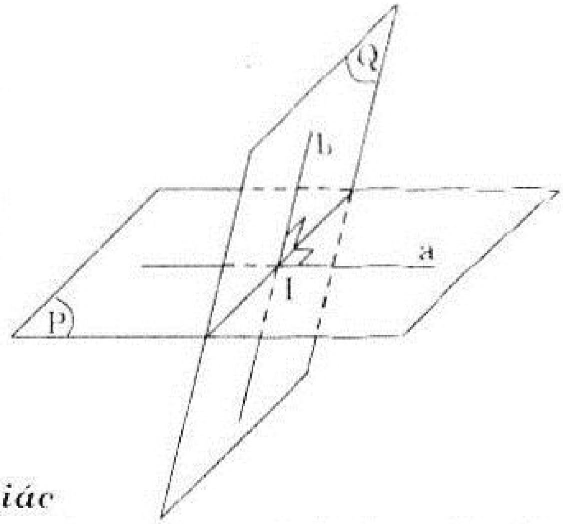
CHỦ ĐỀ 15. Hai mặt phẳng vuông góc

1. Góc giữa hai mặt phẳng

- ***Định nghĩa*** *: Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Nếu hai mặt đó song song hoặc trùng nhau thì ta nói góc giữa hai mặt phẳng đó bằng* 0^0.



- ***Cách xác định góc***



Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ.

Từ điểm I bất kì trên Δ, ta dựng trong (P) đường thẳng $a \perp \Delta$ và dựng trong (Q) đường thẳng $b \perp \Delta$.

Ta có : góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là góc giữa hai đường thẳng a và b.

- ***Diện tích hình chiếu của một đa giác***

Cho đa giác (H) nằm trong mặt phẳng (P) có diện tích là S và (H') là hình chiếu vuông góc của (H) trên mp (Q); (H') có diện tích là S'. Gọi φ là góc giữa (P) và (Q).

Ta có : $\boxed{S' = S.\cos\varphi}$

2. Hai mặt phẳng vuông góc

- ***Định nghĩa :*** *Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là góc vuông.*

Kí hiệu : $(P) \perp (Q)$: mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) vuông góc nhau.

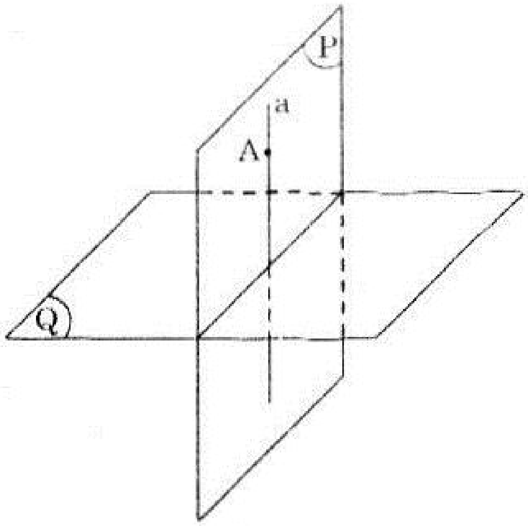
- ***Các định lí***

Định lí 1 : *Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.*

Hệ quả 1 : *Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là điểm nằm trong (P) thì đường thẳng a đi qua A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P).*

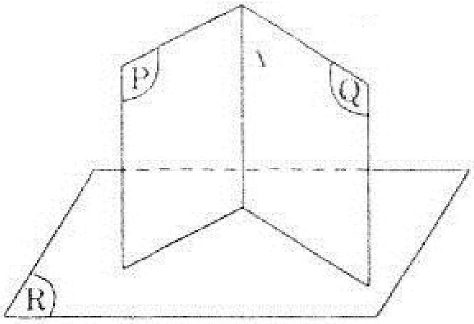
Vậy :
$$\left.\begin{array}{l} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ a \perp (Q) \\ A \in a \end{array}\right\} \Rightarrow a \subset (P).$$

Hệ quả 2 : *Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất kì đường thẳng a nào thuộc (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) sẽ vuông góc với mặt phẳng (Q).*



Vậy :
$$\left.\begin{array}{l} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = \Delta \\ a \subset (P) \\ a \perp \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (Q).$$

__Định lí 2__ : Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng đó.



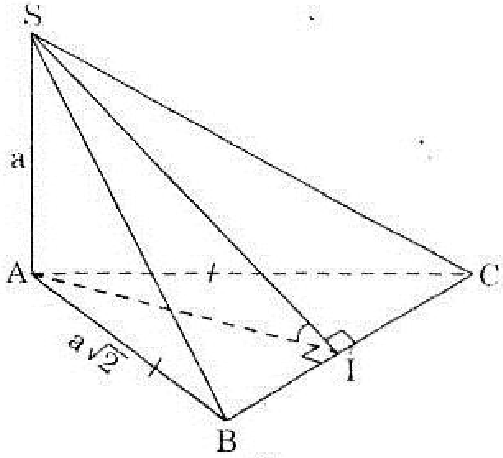
Vậy : $\left.\begin{array}{l}(P)\cap(Q)=\Delta\\(P)\perp(R)\\(Q)\perp(R)\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta\perp(R).$

__Hệ quả__ : Qua đường thẳng a không vuông góc với mp (P) có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mp (P).

Bài 1. Cho hình chóp S.ABC, đáy là tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh góc vuông là $a\sqrt{2}$. SA vuông góc mp (ABC) sao cho SA = a. Gọi I là trung điểm BC.

1. Chứng minh : (SBC) ⊥ (SAI).
2. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).
3. Tính diện tích tam giác SBC.

Giải



1. Ta có : $\left.\begin{array}{l}SA\perp(ABC)\\BC\subset(ABC)\end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp SA.$

Mặt khác ΔABC vuông cân tại A có AI là đường trung tuyến ⇒ BC ⊥ AI.

Vậy có : $\left.\begin{array}{l}BC\perp SA\\BC\perp AI\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}BC\perp(SAI)\\\text{mà } BC\subset(SBC)\end{array}\right\}$

⇒ (SBC) ⊥ (SAI).

2. Theo chứng minh trên : $\left.\begin{array}{r}BC\perp(SAI)\\\text{mà } SI\subset(SAI)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}BC\perp SI\\\text{mà đã có } BC\perp AI\end{array}\right\}$

⇒ Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc giữa hai đường thẳng SI và AI.

Ta tính góc $\widehat{SIA}$.

Xét ΔSAI vuông tại A, ta có : $\tan\widehat{SIA}=\dfrac{SA}{AI}$

mà $AI=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}.\sqrt{2}}{2}=a$

Vậy $\tan\widehat{SIA}=\dfrac{SA}{AI}=\dfrac{a}{a}=1 \Rightarrow \widehat{SIA}=45^0 \Rightarrow (\widehat{SI,AI})=45^0$

Hay góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là 45^0.

3. Vì SA ⊥ (ABC), suy ra ΔABC là hình chiếu vuông góc của ΔSBC trên mp (ABC).

Vậy : dt (ABC) = dt (SBC).cos45°

$$\Rightarrow \text{dt (SBC)} = \frac{\text{dt (ABC)}}{\cos 45^0}$$

$$\Rightarrow \text{dt (SBC)} = \frac{\frac{1}{2}\text{AI.BC}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\text{AI.(AB}\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \frac{2a^2}{\sqrt{2}} = a^2\sqrt{2}.$$

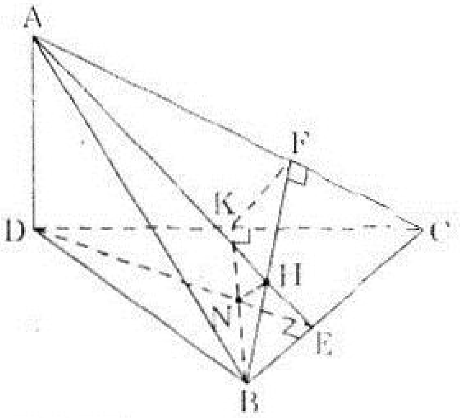
Bài 2. Cho tứ diện ABCD có các mặt ABD, ACD cùng vuông góc với mặt BCD. Gọi DE, BK là hai đường cao của tam giác BCD; BF là đường cao của tam giác BAC.

1. Chứng minh rằng : (ADE) ⊥ (ABC); (BKF) ⊥ (ABC).
2. Gọi H là giao điểm của AE và BF; N là giao điểm của DE và BK. Chứng minh rằng H là hình chiếu vuông góc của N lên mp (ABC).

Giải

1.• Ta có :

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{(ABD)} \perp \text{(BCD)} \\ & \text{(ACD)} \perp \text{(BCD)} \\ \text{và} & \text{(ABD)} \cap \text{(ACD)} = \text{AD} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{AD} \perp \text{(BCD)}$$



• Ta có :

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{AD} \perp \text{(DBC)} \\ \text{mà} & \text{BC} \subset \text{(DBC)} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \text{BC} \perp \text{AD} \\ \text{mà có : BC} \perp \text{DE (giả thiết)} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \text{BC} \perp \text{(ADE)} \\ \text{mà BC} \subset \text{(ABC)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(ADE)} \perp \text{(ABC)}.$$

• Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} \text{AD} \perp \text{(DBC)} \\ \text{BK} \subset \text{(DBC)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{BK} \perp \text{AD và có BK} \perp \text{DC}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \text{BK} \perp \text{(ADC)} \\ \text{AC} \subset \text{(ADC)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{AC} \perp \text{BK và có AC} \perp \text{BF (giả thiết)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \text{AC} \perp \text{(BKF)} \\ \text{mà AC} \subset \text{(ABC)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(ABC)} \perp \text{(BKF)}.$$

2. Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} \text{(BKF)} \perp \text{(ABC)} \\ \text{(ADE)} \perp \text{(ABC)} \\ \text{(BKF)} \cap \text{(ADE)} = \text{NH} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{NH} \perp \text{(ABC)}$$

hay H là hình chiếu vuông góc của N lên mp (ABC).

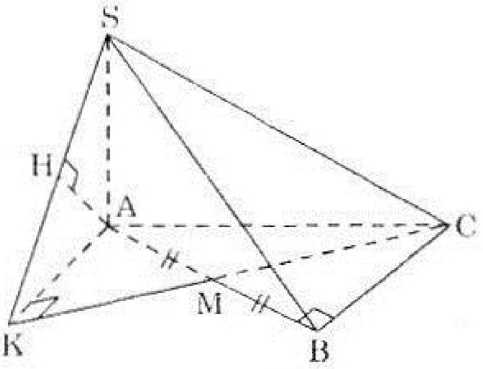
Bài 3. Cho tứ diện S.ABC có $\widehat{ABC} = 90^0$, AB = 2a, BC = $a\sqrt{3}$. Cho biết SA ⊥ (ABC) sao cho SA = 2a. Gọi M là trung điểm của AB.

1. Chứng minh : (SBC) ⊥ (SAB).
2. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) và đường cao AK của tam giác AMC.
3. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SMC) và (ABC).
4. Từ A vẽ AH vuông góc (SMC) tại H. Tính độ dài đoạn AH.

Giải

1. Ta có : $\left.\begin{matrix} SA \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp SA$ và có BC ⊥ AB (giả thiết)

$\left.\begin{matrix} \Rightarrow BC \perp (SAB) \\ \text{và có } BC \subset (SBC) \end{matrix}\right| \Rightarrow (SBC) \perp (SAB).$



2.• Ta có : AB là hình chiếu vuông góc của SB lên mp (ABC),

mà AB ⊥ BC (giả thiết)

⇒ SB ⊥ BC (định lí 3 đường vuông góc)

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc giữa hai đường thẳng SB và AB.

Ta tính góc $\widehat{SBA}$

Xét tam giác SAB vuông tại A, ta có :

$$\tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{2a}{2a} = 1$$

$$\Rightarrow \widehat{SBA} = 45^0 \Rightarrow \widehat{(SB, AC)} = 45^0$$

hay góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là 45^0.

• Ta có : $\Delta KMA \backsim \Delta BMC \Rightarrow \frac{AK}{CB} = \frac{MA}{MC}$

$$\Rightarrow AK = \frac{CB.MA}{MC} = \frac{CB.MA}{\sqrt{MB^2 + BC^2}}$$ (do ΔMBC vuông tại B)

$$\Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{3}.a}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

3. Ta có AK là hình chiếu của SK trên mp (ABC), mà AK ⊥ MC (do AK là đường cao ΔAMC) ⇒ SK ⊥ MC (định lí ba đường vuông góc) ⇒ góc giữa hai mặt phẳng (SMC) và (ABC) là góc giữa hai đường thẳng SK và AK.

Ta tính góc $\widehat{SKA}$. Xét ΔSKA vuông tại A, ta có :

$$\tan\widehat{SKA} = \frac{SA}{AK} = \frac{2a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SKA} = \arctan\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SMC) là $\arctan\frac{4}{\sqrt{3}}$.

4. Theo chứng minh trên, ta có :

$$\left.\begin{array}{l} MC \perp SK \\ \text{và có } MC \perp AK \end{array}\right\} \Rightarrow MC \perp (SAK) \text{ mà } MC \subset (SMC)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (SMC) \perp (SAK) \\ \text{Vì AH qua } A \in (SAK) \\ \text{và } AH \perp (SMC) \end{array}\right| \Rightarrow AH \subset (SAK) \Rightarrow \text{H thuộc SK}$$

Vậy ΔSAK vuông tại A có đường cao là AH

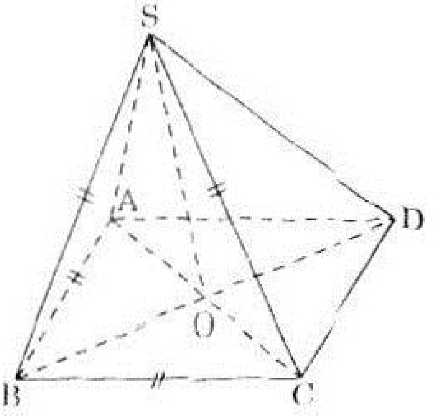
$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{19}{12a^2}$$

$$\Rightarrow AH^2 = \frac{12a^2}{19} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}} = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a; SA = SB = SC = a. Chứng minh rằng :

1. (SBD) ⊥ (ABCD)
2. Tam giác SBD là tam giác vuông.

Giải



1. Ta gọi O = AC ∩ BD

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \text{O là trung điểm của AC và BD.} \\ \text{Mà } \Delta SAC \text{ cân tại S (do SA = SC = a)} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow SO \perp AC \\ \text{mà có : } AC \perp BD \text{ (do ABCD là hình thoi)} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AC \perp (SBD) \\ \text{và có } AC \subset (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow (SBD) \perp (ABCD).$$

2. Nhận xét hai tam giác SAC và BAC bằng nhau (c.c.c), mà SO và BO là hai trung tuyến tương ứng của hai tam giác đó.

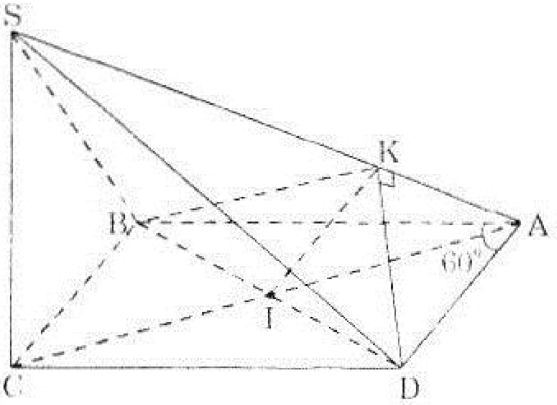
$$\Rightarrow SO = BO \quad \Rightarrow SO = \frac{1}{2}BD \quad \Rightarrow \Delta SBD \text{ vuông tại S.}$$

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I, cạnh a, có góc $\widehat{A} = 60^0$, cạnh SC ⊥ (SAC) sao cho $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

1. Chứng minh rằng : (SBD) ⊥ (SAC).

2. Từ D vẽ DK $\perp$ SA tại K. Chứng minh rằng ΔBKD vuông tại K.
3. Chứng minh : (SAB) $\perp$ (SAD).

Giải



1. Ta có : $\left.\begin{matrix} SC \perp (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp SC$, mà $BD \perp AC$ (vì ABCD là hình thoi)

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow BD \perp (SAC) \\ BD \subset (SBD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (SBD) \perp (SAC).$$

2. Ta có : $BD \perp (SAC)$ (chứng minh câu 1), mà $SA \subset (SAC)$

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow BD \perp SA \\ \text{mà có } SA \perp DK \end{matrix}\right\} \Rightarrow SA \perp (BDK)\text{, mà có } IK \subset (BDK) \Rightarrow SA \perp IK$$

$\Rightarrow \Delta KAI$ vuông tại K

$$\Rightarrow \Delta KAI \backsim \Delta CAS \quad \Rightarrow \frac{KI}{SC} = \frac{AI}{AS} \quad \Rightarrow KI = \frac{CS.AI}{AS} = \frac{CS.AI}{\sqrt{SC^2 + AC^2}}$$

Vì ABCD là hình thoi có $\hat{A} = 60^0 \Rightarrow \Delta ABD$ và ΔCBD là các tam giác đều cạnh a $\Rightarrow AC = 2AI = 2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$$\text{Vậy :} \quad KI = \frac{\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\dfrac{6a^2}{4} + 3a^2}} = \frac{\dfrac{a^2\sqrt{18}}{4}}{\dfrac{\sqrt{18a^2}}{2}} = \frac{a}{2}$$

Mà ΔBKD có KI là đường trung tuyến và $KI = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow \Delta BKD$ vuông tại K.

3. $\left.\begin{matrix} \text{Vì } \Delta BKD \text{ vuông tại K } \Rightarrow KD \perp BK \\ \text{và có } KD \perp SA \text{ (giả thiết)} \end{matrix}\right\}$

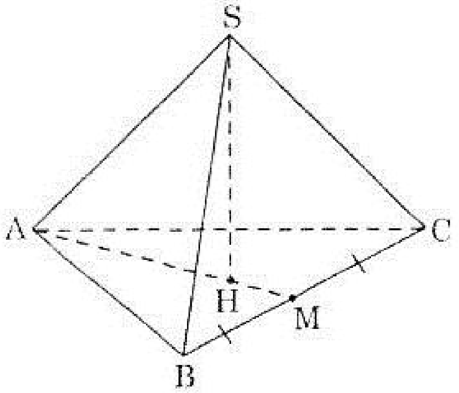
$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow KD \perp (SAB) \\ \text{mà } KD \subset (SAD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (SAD) \perp (SAB).$$

CHỦ ĐỀ 16. – Hình chóp đều
– Hình lăng trụ đứng – Hình hộp chữ nhật

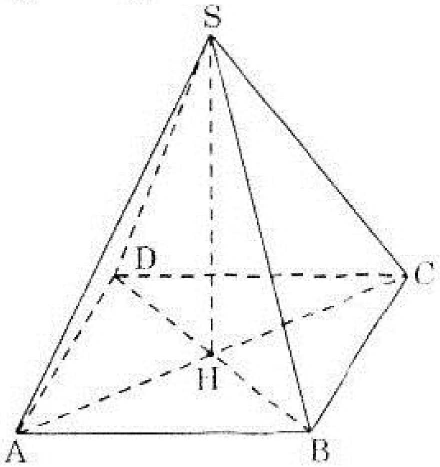
1. Hình chóp đều

a) Định nghĩa

Một hình chóp gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều và chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.



Hình chóp tam giác đều S.ABC



Hình chóp tứ giác đều S.ABCD

b) Nhận xét

- *Hình chóp đều có thể được định nghĩa một cách khác : "Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau".*
- *Một hình chóp đều có một số tính chất :*
  - *Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.*
  - *Các mặt bên của hình chóp đều đều tạo với đáy các góc bằng nhau.*
  - *Các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau.*

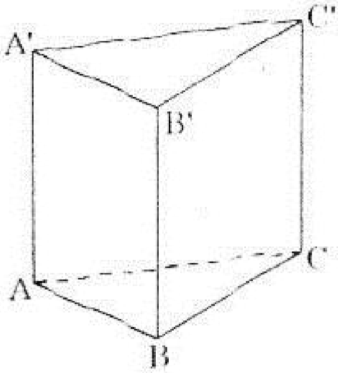
c) Hình chóp cụt đều

- *Định nghĩa : Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt tất cả các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.*

2. Hình lăng trụ đứng – Hình hộp chữ nhật – Hình lập phương

a) Định nghĩa

- *Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với các mặt đáy. Độ dài cạnh bên gọi là chiều cao của hình lăng trụ.*
- *Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều được gọi là hình lăng trụ đều.*
- *Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp đứng.*



- *Hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là hình hộp chữ nhật.*
- *Hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên đều là hình vuông được gọi là hình lập phương.*

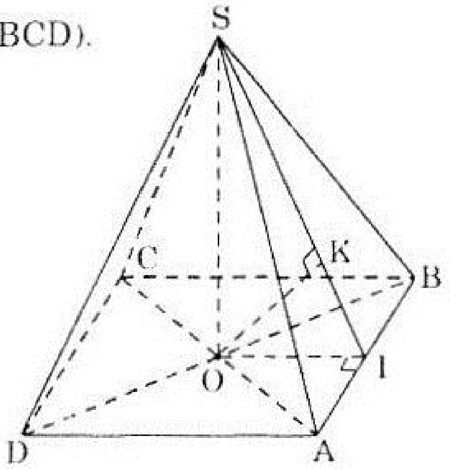
i) Nhận xét

- *Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật.*
- *Các mặt bên của hình lăng trụ đứng vuông góc với mặt đáy.*
- *Các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau.*
- *Sáu mặt của hình hộp chữ nhật là các hình chữ nhật.*

Bài 1. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi O là tâm của ABCD.

1. Tính góc giữa mặt bên SAB và mặt đáy ABCD.
2. Tính góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy ABCD.
3. Từ O vẽ OK vuông góc (SAB) tại K. Tính độ dài đoạn OK.

Giải



1. Vì S.ABCD là hình chóp đều nên có SO ⊥ (ABCD).

Gọi I là trung điểm của AB.

$$\Rightarrow \begin{cases} OI \perp AB \text{ (tính chất hình vuông)} \\ SI \perp AB \text{ (do } \Delta SAB \text{ cân tại S)} \end{cases}$$

$\Rightarrow (\widehat{SI, OI})$ là góc của mặt bên SAB và mặt đáy ABCD.

Ta tính góc $\widehat{OIS}$. Xét ΔSOI vuông tại O,

ta có $\tan\widehat{OIS} = \frac{SO}{OI}$

Mà $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2}$ (do ΔSOB vuông tại O)

$$= \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\widehat{OIS} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} = 1 \quad \Rightarrow \widehat{OIS} = 45^0 \quad \Rightarrow (\widehat{SI, OI}) = 45^0$$

Vậy góc giữa mặt bên SAB và mặt đáy ABCD là 45".

2. Ta có : OB là hình chiếu vuông góc của SB trên (ABCD).

Vậy góc giữa SB và mặt đáy ABCD là góc $(\widehat{SB, OB})$.

Ta tính góc $\widehat{SBO}$.

Xét ΔSOB vuông tại O, ta có :

$$\cos\widehat{SBO} = \frac{OB}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \widehat{SBO} = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Vậy : $(\widehat{SB, OB}) = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$

Hay góc giữa SB và đáy ABCD bằng $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

3. Từ O vẽ $OK \perp SI$ tại K. Ta chứng minh $OK \perp (SAB)$.

Ta có : $\begin{cases} AB \perp OI \text{ (do tính chất hình vuông)} \\ AB \perp SO \text{ (do } SO \perp (ABCD) \text{ và có } AB \subset (ABCD)) \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \Rightarrow AB \perp (SOI) \\ \text{mà } AB \subset (SAB) \end{array}\right\} \Rightarrow (SAB) \perp (SOI) \\ \qquad \text{Mà : } (SAB) \cap (SOI) = SI \\ \qquad\qquad OK \subset (SOI) \text{ và } OK \perp SI \end{array}\right\} \Rightarrow OK \perp (SAB)$$

Xét ΔSOI vuông tại O, có OK là đường cao, ta có :

$$SO^2 = SK.SI \quad \Rightarrow SK = \frac{SO^2}{SI} = \frac{SO^2}{\sqrt{SB^2 - IB^2}}$$

$$\Rightarrow SK = \frac{\frac{a^2}{4}}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}}} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Bài 2. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên bằng l, mặt bên tạo với đáy một góc $\varphi = 60^0$. Tính cạnh đáy và chiều cao của hình chóp.

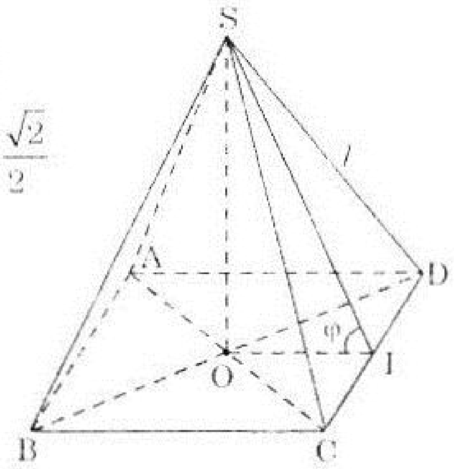
Giải

Gọi O là tâm của ABCD $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Gọi I là trung điểm của CD $\Rightarrow \begin{cases} OI \perp CD \\ SI \perp CD \end{cases}$

$\Rightarrow (\widehat{SI, OI})$ là góc giữa mặt bên SCD và mặt đáy ABCD

$\Rightarrow \widehat{SIO} = \varphi$



Đặt x là cạnh hình vuông ABCD ⇒ $\begin{cases} OI = \dfrac{x}{2} \\ OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Xét ΔSIO vuông tại O, ta có : $\tan\varphi = \dfrac{SO}{OI}$

$\Rightarrow SO = OI.\tan\varphi = \dfrac{x}{2}\tan\varphi \qquad (a)$

Xét ΔSOD vuông tại O, ta có :

$$SO^2 = SD^2 - OD^2 = l^2 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 = l^2 - \frac{x^2}{2} \qquad (b)$$

Từ (a) và (b), ta có : $\dfrac{x^2}{4}\tan^2\varphi = l^2 - \dfrac{x^2}{2} \Leftrightarrow x^2\left(\dfrac{1}{4}\tan^2\varphi - \dfrac{1}{2}\right) = l^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}x^2(\tan^2\varphi - 2) = l^2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{4l^2}{\tan^2\varphi - 2}$

$\Rightarrow x = \dfrac{2l}{\sqrt{\tan^2\varphi - 2}} = \dfrac{2l}{\sqrt{\tan^2 60^0 - 2}} = \dfrac{2l}{\sqrt{3 - 2}} = 2l$

Vậy cạnh đáy của hình chóp AB = $2l$ và chiều cao SO = $l\tan\varphi = l\sqrt{3}$.

Bài 3. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là ΔABC vuông tại A, AC = a và $C = 60^0$. Đường chéo BC' của mặt bên BB'C'C tạo với mặt bên AA'C'C một góc 30^0.

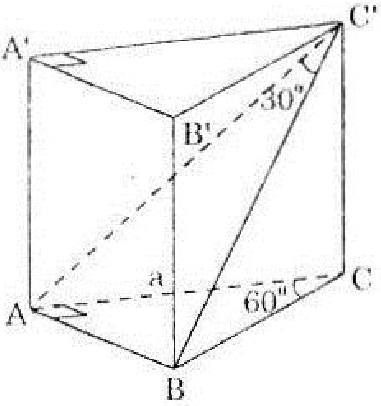
1. Tính độ dài đoạn AC'.
2. Tính góc của hai mặt phẳng (C'AB) và (ABC).

Giải

1. Ta có : $\left.\begin{array}{ll} BA \perp AC & \text{(do ΔABC vuông tại A)} \\ BA \perp AA' & \text{(do } AA' \perp (ABC)) \end{array}\right\} \Rightarrow BA \perp (AA'C'C)$

Suy ra AC' là hình chiếu vuông góc của BC' trên (AA'C'C)

$\Rightarrow (\widehat{BC', AC'}) = 30^0$ hay $\widehat{AC'B} = 30^0$



Xét ΔABC vuông tại A, ta có :

$$\tan 60^0 = \frac{AB}{a} \Rightarrow AB = a\tan 60^0 = a\sqrt{3}$$

Xét ΔABC' vuông tại A (vì BA ⊥ (AA'C'C);
AC' ⊂ (AA'C'C))

$$\tan 30^0 = \frac{AB}{AC'} \Rightarrow AC' = \frac{AB}{\tan 30^0} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3a.$$

2. Ta có : $\left.\begin{array}{l} AB \perp (AA'C'C) \\ AC' \perp (AA'C'C) \end{array}\right\} \Rightarrow AC' \perp AB$ và có $AC \perp AB$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (C'AB) và (ABC) là góc $(\widehat{AC', AC})$.

Ta tính góc $\widehat{C'AC}$.

Xét $\Delta ACC'$ vuông tại C, ta có :

$$\cos\widehat{C'AC} = \frac{AC}{AC'} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \widehat{C'AC} = \arccos\frac{1}{3}$$

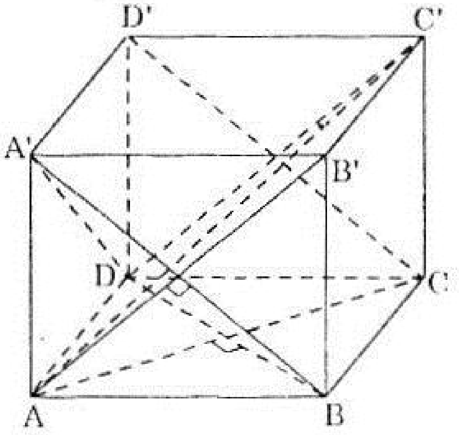
hay $(\widehat{AC', AC}) = \arccos\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng $\arccos\frac{1}{3}$.

Bài 4. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng :

1. $(AB'C'D) \perp (BCD'A')$
2. $AC' \perp (A'BD)$.

Giải



1. Ta có : $\left.\begin{array}{l} AD \perp (AA'B'B) \\ A'B \subset (AA'B'B) \end{array}\right\} \Rightarrow A'B \perp AD$ và có $A'B \perp AB'$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow A'B \perp (AB'C'D) \\ \text{mà } A'B \subset (BCD'A') \end{array}\right\} \Rightarrow (AB'C'D) \perp (BCD'A')$.

2. Ta có AC là hình chiếu của AC' trên (ABCD), mà $AC \perp BD$

$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow AC' \perp BD \\ \text{Chứng minh tương tự có : } AC' \perp A'B \end{array}\right\} \Rightarrow AC' \perp (A'BD)$.

TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc nhau và có giao tuyến là Δ. Trên Δ lấy điểm A và B, trên mp (P) lấy điểm C sao cho AC vuông góc với Δ và trên mp (Q) lấy điểm D sao cho BD vuông góc với Δ và gọi O là trung điểm của CD.

1. Chứng minh rằng : OA = OB = OC = OD.
2. Từ A vẽ AK vuông góc BC tại K. Chứng minh rằng : AK ⊥ (BCD).

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a; $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. SO vuông góc (ABCD) sao cho $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

1. Chứng minh rằng ΔSAC vuông.
2. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

Bài 3. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

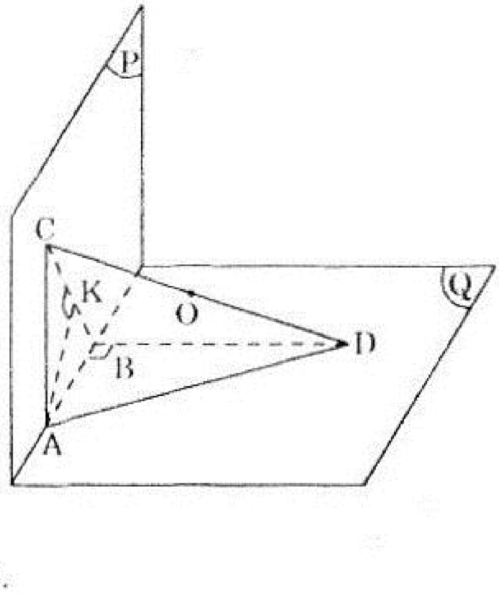
1. Tính độ dài đoạn SO.
2. Gọi M là trung điểm của đoạn SC. Chứng minh rằng (MBD) ⊥ (SAC).
3. Tính độ dài đoạn OM và góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD).

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và SA vuông góc (ABCD) sao cho SA = b. Giả sử góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) là 60^0. Chứng minh rằng : a = b.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

1. Ta có :
$$\left.\begin{array}{l}(P)\perp(Q)\\(P)\cap(Q)=\Delta\\AC\subset(P)\\AC\perp\Delta\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}AC\perp(Q)\\\text{mà }AD\subset(Q)\end{array}\right\}\Rightarrow AC\perp AD$$



⇒ ΔACD vuông tại A,

mà có AO là trung tuyến của ΔACD

$\Rightarrow AO = \frac{CD}{2} \Rightarrow AO = OC = OD$ (a)

Chứng minh tương tự có : BD ⊥ (P),

mà BC ⊂ (P) ⇒ BD ⊥ BC

⇒ ΔBCD vuông tại B,

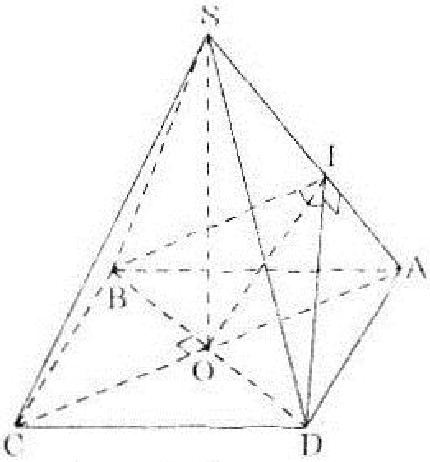
mà OB là đường trung tuyến của ΔBCD

⇒ OB = OC = OD (b)

Từ (a) và (b) suy ra : OA = OB = OC = OD.

2. Theo chứng minh trên ta có :
$$\left.\begin{array}{r}BD\perp(P)\\\text{mà }AK\subset(P)\end{array}\right\}\Rightarrow AK\perp BD \text{ và có } AK\perp BC$$
$$\Rightarrow AK\perp(BCD).$$

Bài 2.



1. Xét ΔOBC vuông tại O, ta có :

$$OC = \sqrt{BC^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}}$$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Mà OA = OC

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow SO = OA = OC \Rightarrow SO = \dfrac{AC}{2} \\ \text{mà SO là trung tuyến của } \Delta SAC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta SAC \text{ vuông tại S.}$$

2. Xét ΔSOD vuông tại O, có :

$$SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{\frac{6a^2}{9} + \frac{3a^2}{9}} \quad \text{(vì OD = OB)}$$

$$= a$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow SD = AD = a \quad \Rightarrow \Delta SDA \text{ cân tại D} \\ \text{Gọi I là trung điểm của SA.} \end{array}\right\} \Rightarrow DI \perp SA$$

Chứng minh tương tự : ΔSBA cân tại B $\Rightarrow BI \perp SA$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là góc $(\widehat{BI, DI})$.

Ta tính $\widehat{BID}$.

Theo chứng minh trên ta có : SO = OA

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \Delta SOA \text{ vuông cân tại O} \\ \text{mà I là trung điểm SA} \end{array}\right\} \Rightarrow OI \perp SA$$

$$\Rightarrow OI = \frac{SA}{2} = \frac{OA\sqrt{2}}{2} = \frac{OC\sqrt{2}}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}.\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{12}}{6}$$

Dễ thấy hai tam giác SAB và SAD bằng nhau.

Suy ra BI = DI $\Rightarrow \Delta BID$ cân tại I

$\Rightarrow$ OI là phân giác góc $\widehat{BID}$ $\Rightarrow \widehat{BID} = 2\widehat{OID}$

$$\text{Ta có : } \left.\begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp SO \text{ (do } SO \perp (ABCD)) \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \text{ mà } OI \subset (SAC)$$

$\Rightarrow BD \perp OI$ $\Rightarrow \Delta SOD$ vuông tại O, ta có :

$$\tan\widehat{OID} = \frac{OD}{OI} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{a\sqrt{12}}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{6}{\sqrt{12}} = \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = 1$$

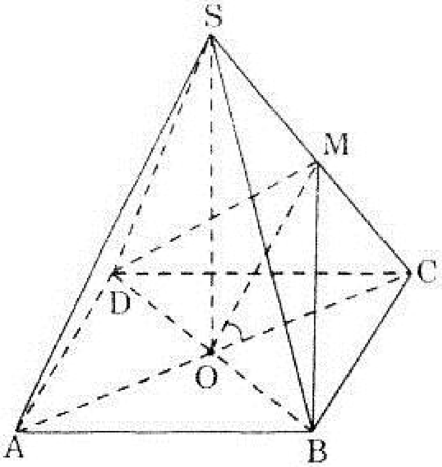
$\Rightarrow \widehat{OID} = 45^0 \Rightarrow \widehat{BID} = 90^0$

Vậy $(\widehat{BI, DI}) = 90^0$ hay góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là 90^0.

Bài 3.

1. Do hình chóp S.ABCD là hình chóp đều

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow SO \perp (ABCD) \\ \text{mà } OC \subset (ABCD)\end{array}\right\} \Rightarrow SO \perp OC \text{ hay } \Delta SOC \text{ vuông tại O.}$$



Suy ra : $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

2. Vì ΔSBC là tam giác đều

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow BM \perp SC \\ \text{tương tự : } DM \perp SC\end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp (MBD)$$

mà $SC \subset (SAC) \Rightarrow (MBD) \perp (SAC)$.

3. • Ta có ΔSOC vuông tại O và có OM là đường trung tuyến

$\Rightarrow OM = \frac{SC}{2} = \frac{a}{2}$.

• Ta có : $BD \perp AC$ (vì ABCD là hình vuông)

$BD \perp SO$ (vì $SO \perp (ABCD)$)

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow BD \perp (SAC) \\ OM \subset (SAC)\end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{r}\Rightarrow OM \perp BD \\ \text{và có : } OC \perp BD\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD) là góc $(\widehat{OM, OC})$, ta tính góc $\widehat{MOC}$.

Theo chứng minh trên ta có : $SO = OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \Delta SOC$ vuông cân tại O. Mà OM là trung tuyến của ΔSOC

$\Rightarrow OM \perp SC$ hay ΔOMC vuông tại M.

Ta có : $\tan\widehat{MOC} = \frac{MC}{OC} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \widehat{MOC} = 45^0 \Rightarrow (\widehat{OM, OC}) = 45^0$$

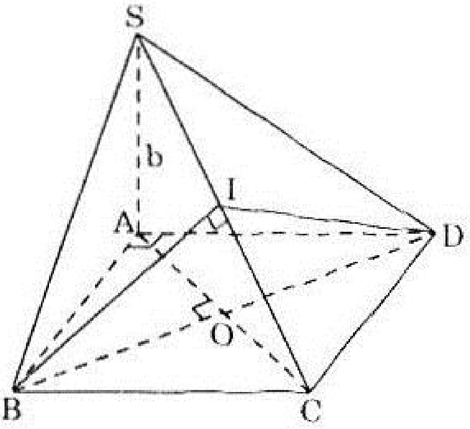
hay góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD) là 45^0.

Bài 4. • Từ B vẽ $BI \perp SC$ tại I (a)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ta có: } SA \perp (ABCD)\\ \text{mà } BD \subset (ABCD)\end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp SA, \text{ lại có } BD \perp AC$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow BD \perp (SAC)\\ \text{và có: } SC \subset (SAC)\end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp BD\\ \qquad\text{Theo cách dựng: } SC \perp BI\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow SC \perp (BID)\\ \text{Mà } ID \subset (BID)\end{array}\right\} \Rightarrow ID \perp SC \text{ tại I (b)}$$



Từ (a) và (b) ta được: $(\widehat{BI, ID})$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SDC).

- Ta tính $\cos\widehat{BID}$.

$$BD = a\sqrt{2} \text{ (đường chéo hình vuông)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ta có: AB là hình chiếu của SB trên mp (ABCD)}\\ \text{mà } AB \perp BC \text{ (do ABCD là hình vuông)}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \quad SB \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc)

Vậy ΔSBC vuông tại B, có AI là đường cao, nên có:

$$\frac{1}{BI^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{SA^2 + AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{b^2 + a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2a^2 + b^2}{a^2(a^2 + b^2)}$$

$$\Rightarrow BI^2 = \frac{a^2(a^2 + b^2)}{2a^2 + b^2}$$

Tương tự có: $DI^2 = \dfrac{a^2(a^2 + b^2)}{2a^2 + b^2}$

Xét ΔBID ta có: $BD^2 = BI^2 + DI^2 - 2BI.DI.\cos\widehat{BID}$

$$\Rightarrow \cos\widehat{BID} = \frac{BI^2 + DI^2 - BD^2}{2BI.DI} = \frac{2\dfrac{a^2(a^2 + b^2)}{2a^2 + b^2} - 2a^2}{2.\dfrac{a^2(a^2 + b^2)}{2a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{a^2(a^2 + b^2) - a^2(2a^2 + b^2)}{a^2(a^2 + b^2)} = \frac{-a^2}{(a^2 + b^2)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Vậy: } \cos(\widehat{BI, ID}) = \left|\dfrac{-a^2}{a^2 + b^2}\right| = \dfrac{a^2}{a^2 + b^2}\\[2ex] \text{Theo giả thiết: } \cos(\widehat{BI, ID}) = \cos 60^0 = \dfrac{1}{2}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2a^2 = a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = b.$$

CHỦ ĐỀ 17. Khoảng cách

A. KHOẢNG CÁCH :

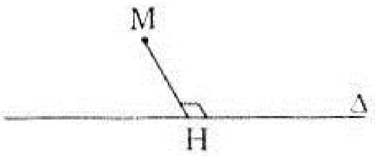
- **Từ điểm đến đường thẳng – mặt phẳng**
- **Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song**

* *Gọi H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng Δ.*

Ta nói :

"Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là độ dài đoạn thẳng MH".

Kí hiệu : $d(M, \Delta)$

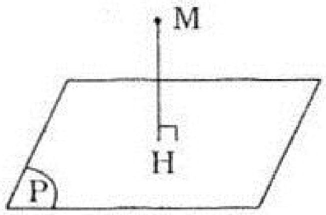


* *Gọi H là hình chiếu của điểm M trên mp (P).*

Ta nói :

"Khoảng cách từ điểm M đến mp (P) là độ dài đoạn thẳng MH".

Kí hiệu : $d(M, (P))$

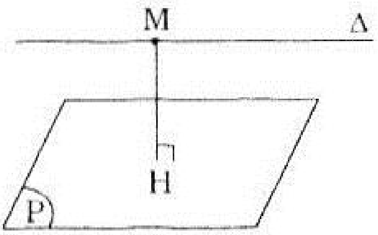


* *Cho đường thẳng Δ // mp (P).*

Ta nói :

"Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mp (P) là khoảng cách từ một điểm bất kì của Δ đến mp (P)".

Kí hiệu : $d(\Delta, (P))$



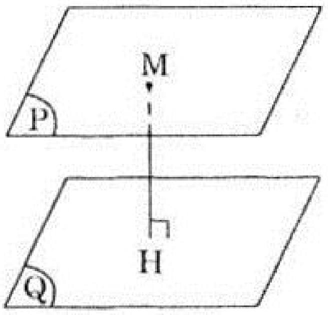
* *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song*

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) sao cho (P) // (Q).

Ta nói :

"Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia".

Kí hiệu : $d((P), (Q))$



Chú ý : *Trong các khoảng cách đã nêu ta có tính chất :*

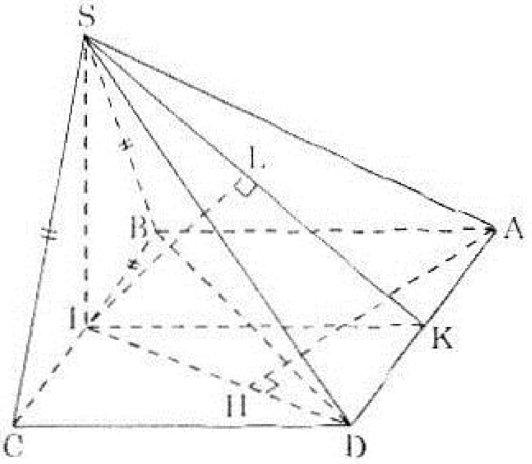
- *Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng (mặt phẳng) là bé nhất so với các khoảng cách từ điểm đó đến một điểm bất kì của đường thẳng (mặt phẳng).*
- *Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là bé nhất so với khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc Δ tới một điểm bất kì thuộc mp (P).*
- *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là bé nhất trong các khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này tới một điểm bất kì của mặt phẳng kia.*

Bài 1. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi I là trung điểm cạnh BC. Trên đường vuông góc với mp (ABCD) tại I ta lấy điểm S sao cho ΔSBC là tam giác đều. Tính :

1. d (S, (ABCD)) 2. d (A, (SID))

3. d (I, (SAD)) 4. d (B, (SAD)).

Giải



1. Ta có : SI ⊥ (ABCD) tại I (giả thiết)

⇒ SI = d (S, (ABCD))

Mà ΔSBC là tam giác đều cạnh a

$$\Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy : $d(S, (ABCD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

2. $$\left.\begin{array}{l}\text{Ta có : } SI \perp (ABCD)\\ \text{Mà } SI \subset (SID)\end{array}\right\}$$

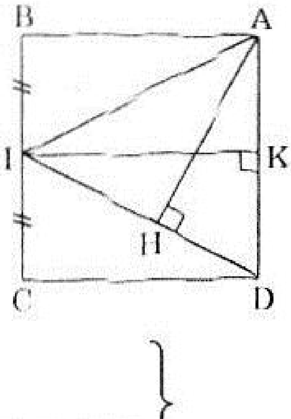
$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow (ABCD) \perp (SID)\\ \text{Với } (ABCD) \cap (SID) = ID\\ \text{Từ A vẽ } AH \perp DI \text{ tại H}\\ \quad\text{và } AH \subset (ABCD)\end{array}\right\}\begin{array}{l}\Rightarrow AH \perp (SID) \text{ tại H.}\\ \text{Vậy } AH = d(A, (SID)).\end{array}$$

Xét ΔIAD, ta có :

$2S_{\Delta IAD} = AH.ID = IK.AD$ (với K là trung điểm của AD)

$$\Rightarrow AH = \frac{IK.AD}{ID} = \frac{IK.AD}{\sqrt{IC^2 + CD^2}} = \frac{a.a}{\sqrt{\dfrac{a^2}{4} + a^2}}$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{\dfrac{5a^2}{4}}} = \frac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$



Vậy : $d(A, (SID)) = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

3. $$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Ta có : } SI \perp (ABCD)\\ \text{mà } AD \subset (ABCD)\end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp SI\\ \text{và } AD \perp IK \text{ (tính chất hình vuông)}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AD \perp (SIK)\\ \text{mà } AD \subset (SAD)\end{array}\right\} \Rightarrow (SIK) \perp (SAD) \quad \text{với } (SIK) \cap (SAD) = SK$$

Từ I vẽ IL ⊥ SK tại L ⇒ IL ⊥ (SAD) tại L.

Vậy : IL = d (I, (SAD))

Xét ΔSIK vuông tại I có IL là đường cao nên có :

$$\frac{1}{IL^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2}$$

$$\Rightarrow IL^2 = \frac{3a^2}{7} \quad \Rightarrow IL = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Vậy : d (I, (SAD)) = $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

4. Ta có : $\left.\begin{array}{l} BC \,//\, AD \\ \text{Mà } AD \subset (SAD) \end{array}\right\} \Rightarrow BC \,//\, (SAD)$

$\left.\begin{array}{l} \text{Vậy : } d\,(B, (SAD)) = d\,(I, (SAD)) \\ \text{mà } d\,(I, (SAD)) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow d\,(B, (SAD)) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}.$

Bài 2 Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, cạnh đáy là a, cạnh bên 2a. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Tính d (I, (SBC)).

Giải

Gọi O là tâm hình vuông ⇒ SO ⊥ (ABCD) (do là hình chóp đều)

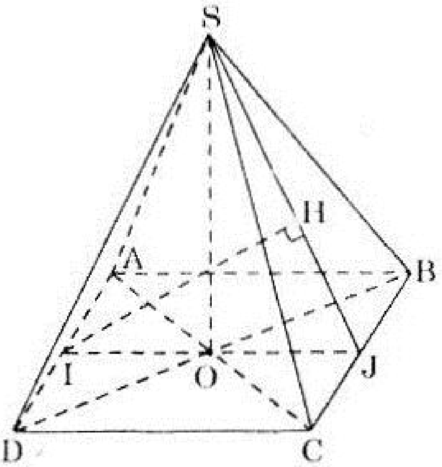
Gọi OI ∩ BC = J ⇒ J là trung điểm của BC

Ta có : $\left.\begin{array}{l} SO \perp (ABCD) \\ BC \subset (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp SO$ và có $BC \perp IJ$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow BC \perp (SIJ) \\ \text{mà } BC \subset (SBC) \end{array}\right\} \Rightarrow (SIJ) \perp (SBC)$ với $(SBC) \cap (SIJ) = SJ$

Từ I vẽ IH ⊥ SJ tại H ⇒ IH ⊥ (SBC) tại H

Vậy : IH = d (I, (SBC)).



Xét ΔSOB vuông tại O, ta có :

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{7a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$$

Xét ΔSOJ vuông tại O, ta có :

$$SJ = \sqrt{SO^2 + OJ^2} = \sqrt{\frac{7a^2}{2} + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{15a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

Xét ΔSIJ, ta có :

$$2S_{\Delta SIJ} = IH.SJ = SO.IJ \Rightarrow IH = \frac{SO.IJ}{SJ} = \frac{\frac{a\sqrt{14}}{2}.a}{\frac{a\sqrt{15}}{2}} = \frac{a\sqrt{14}}{\sqrt{15}}$$

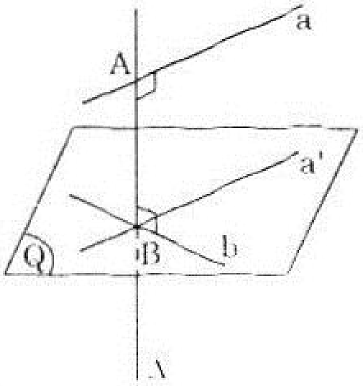
Vậy : $d(I, (SBC)) = \dfrac{a\sqrt{14}}{\sqrt{15}}$.

B. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

1. Bài toán

Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Hãy tìm đường thẳng Δ cắt cả hai đường thẳng a và b đồng thời vuông góc với cả a và b.

Giải



- *Gọi (Q) là mặt phẳng chứa b và a // (Q)*

  a' là hình chiếu vuông góc của a trên mp (Q).

- $\left.\begin{array}{l}\text{Vì } a \,//\, (Q) \\ a' \text{ là hình chiếu của } a \text{ trên } (Q)\end{array}\right\}$

  $\left.\begin{array}{l}\Rightarrow a \,//\, a' \\ \text{Vì } a \text{ và } b \text{ chéo nhau}\end{array}\right\} \Rightarrow a' \text{ cắt } b \text{ tại } B.$

- *Gọi (P) là mặt phẳng chứa a và a'* $\Rightarrow (P) \perp (Q)$

- *Gọi Δ là đường thẳng qua B và vuông góc với (Q).*

  $\Rightarrow \Delta \subset (P) \Rightarrow$ *Δ cắt a tại A và có Δ cắt b tại B và cũng có* $\Delta \perp a$, $\Delta \perp b$

  Vậy Δ là đường vuông góc chung của a và b.

2. Khái niệm

- *Đường thẳng Δ trong bài toán trên được gọi là đường vuông góc chung của a và b chéo nhau.*
- *Đoạn thẳng AB được gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.*
- *Ta định nghĩa : "Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó".*

3. Nhận xét

- *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là bé nhất so với khoảng cách giữa hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai đường thẳng đó.*
- *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó, chứa đường thẳng còn lại.*
- *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.*

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD) sao cho SA = a. Dựng và tính đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau :

1. SB và CD   2. SB và AD   3. BD và SC   4. AB và SC.

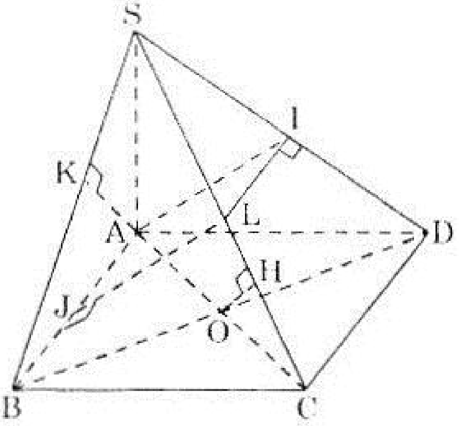
Giải

1. Ta có : $\left.\begin{array}{l}\text{AB là hình chiếu của SB trên (ABCD)}\\ \text{mà } AB \perp BC \text{ (do ABCD là hình vuông)}\end{array}\right\}$

$\Rightarrow SB \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc)

Vậy : $\left.\begin{array}{l}SB \perp BC \text{ tại } B\\ BC \perp CD \text{ tại } C\end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD có BC = a.



2. Ta có : $\left.\begin{array}{l}SA \perp (ABCD)\\ AD \subset (ABCD)\end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow SA \perp AD\\ \text{và có : } AD \perp AB\end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp (SAB)$

Từ A vẽ AK ⊥ SB tại K.

Mặt khác có : AD ⊥ (SAB) (cmt), mà AK ⊂ (SAB)

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AK \perp AD \text{ tại } A\\ \text{Theo cách dựng : } AK \perp SB \text{ tại } K\end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ AK là đoạn vuông góc chung của SB và AD.

Xét ΔSAB vuông cân tại A và có AK là đường cao $\Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

3. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có : $\left|\begin{array}{l}BD \perp AC \text{ (tính chất hai đường chéo hình vuông)}\\ BD \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD), BD \subset (ABCD))\end{array}\right.$

$\Rightarrow BD \perp (SAC)$

Từ O vẽ OH ⊥ SC tại H.

Mặt khác có : $\begin{cases}BD \perp (SAC)\\ OH \subset (SAC)\end{cases}$

$\Rightarrow$ OH ⊥ BD tại O, mà OH ⊥ SC tại H (cách dựng)

$\Rightarrow$ OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Nhận xét ΔHOC ∽ ΔASC

$$\Rightarrow \frac{OH}{SA} = \frac{OC}{SC} \Rightarrow OH = \frac{SA.OC}{SC} = \frac{SA.OC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{a.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2+2a^2}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2\sqrt{3a^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

4. Ta có : $\begin{cases} AB \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow AB \parallel (SCD)$

$\Rightarrow$ hình chiếu của AB trên (SCD) là một đường thẳng song song với AB

Vậy ta có thể dựng hình chiếu của AB trên (SCD) như sau :

- Từ A vẽ $AI \perp SD$ tại I

  mà có : $\left.\begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABCD)) \end{array}\right\}$

  $\left.\begin{array}{l} \Rightarrow CD \perp (SAD) \\ \text{Mà } AI \subset (SAD) \end{array}\right\} \Rightarrow AI \perp CD$ và có $AI \perp SD$

  $\Rightarrow AI \perp (SCD)$ tại I $\Rightarrow$ I là hình chiếu của A trên (SCD).

- Từ I vẽ $IL \parallel AB$ cắt SC tại L.

  Từ L vẽ $LJ \parallel AI$ cắt AB tại J.

- Ta có JL là đoạn vuông góc chung của AB và SC.

  Nhận xét : Theo cách dựng trên ta có AILJ là hình chữ nhật

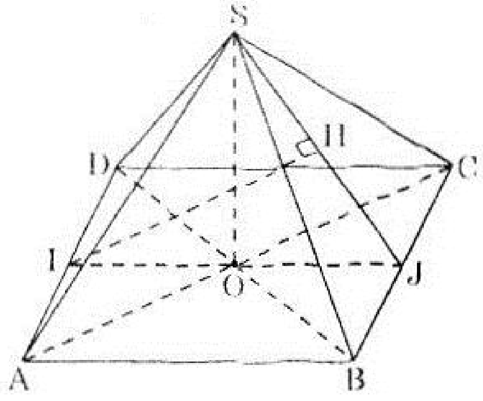
  $\Rightarrow JL = AI$, mà AI là đường cao Δ vuông cân SAD nên có $AI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

  $\Rightarrow JL = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bài 4. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC.

1. Chứng minh rằng : $(SIJ) \perp (SBC)$.
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AD và SB.

Giải



1. Gọi O là tâm hình vuông ABCD.

   Và vì S.ABCD là hình chóp đều

   $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$, mà $BC \subset (ABCD)$

   $\left.\begin{array}{l} \Rightarrow BC \perp SO \\ \text{và có : } BC \perp IJ \end{array}\right\}$

   $\left.\begin{array}{l} \Rightarrow BC \perp (SIJ) \\ \text{và có : } BC \subset (SBC) \end{array}\right\} \Rightarrow (SBC) \perp (SIJ).$

2. $$\left.\begin{array}{l}\text{Ta có : } AD \,/\!/\, BC \\ \quad \text{mà } BC \subset (SBC)\end{array}\right\} \Rightarrow AD \,/\!/\, (SBC) \text{ và có } SB \subset (SBC)$$

$\Rightarrow d\,(AD, SB) = d\,(AD, (SBC)) = d\,(J, (SBC))$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ta có : } (SBC) \perp (SIJ) \\ \quad \text{với } (SBC) \cap (SIJ) = SJ \\ \text{Từ J vẽ } JH \perp SJ \text{ tại H.}\end{array}\right\} \Rightarrow JH \perp (SBC)$$

Vậy : $JH = d\,(J, (SBC))$

Xét ΔSIJ vuông tại C, ta có :

$$2S_{SIJ} = SO.IJ = JH.SJ \Rightarrow JH = \frac{SO.IJ}{SJ} \qquad (1)$$

Xét ΔSOC vuông tại C, ta có :

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{3a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \qquad (2)$$

Xét ΔSOJ vuông tại O, ta có :

$$SJ = \sqrt{SO^2 + OJ^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{2} + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{7a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2} \qquad (3)$$

Thay (2) và (3) vào (1), ta được : $JH = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.a}{\dfrac{a\sqrt{7}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$

Vậy : $d\,(J, (SBC)) = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$ hay $d\,(AD, SB) = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O, cạnh a, $\widehat{A} = 60^0$ và $SO \perp (ABCD)$ sao cho $SO = a$.

1. Tính $d\,(O, (SBC))$.
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AD và SB.

Bài 2. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, BC = b, CC' = c.

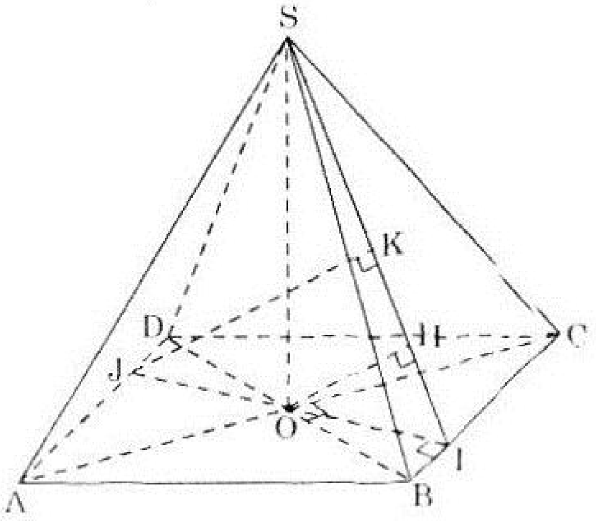
1. Tính $d\,(B, (ACC'A'))$.
2. Tính khoảng cách giữa hai dương thẳng BB' và AC'.

Bài 3. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai cạnh đối của tứ diện đó.

Bài 4. Cho tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của AB, J là trung điểm của CD. Chứng minh rằng : AC = BD và AD = BC nếu và chỉ nếu IJ là đường vuông góc chung của AB và CD.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.



1. Từ O vẽ OI ⊥ BC tại I

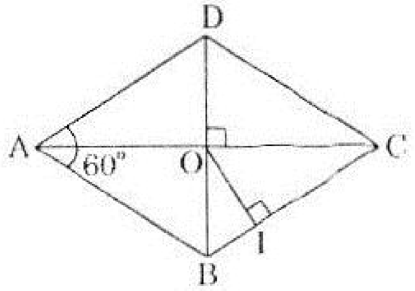
$$\left.\begin{array}{r}\text{mà } SO \perp (ABCD)\\ BC \subset (ABCD)\end{array}\right\} \Rightarrow SO \perp BC$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Suy ra } BC \perp (SOI)\\ \text{mà } BC \subset (SBC)\end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow (SBC) \perp (SOI)\\ \text{và có } (SBC) \cap (SOI) = SI\\ \text{Từ O vẽ } OH \perp SI \text{ tại H}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow OH \perp (SBC)$ tại H

Vậy : $OH = d(O, (SBC))$



Vì ABCD là hình thoi có $\hat{A} = 60^0$

$\Rightarrow \Delta BCD$ là tam giác đều cạnh là a

$$\Rightarrow \begin{cases} OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ OB = \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

ΔBOC vuông tại O, có đường cao là OI nên có :

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{16}{3a^2} \quad \Rightarrow OI^2 = \frac{3a^2}{16}$$

Xét ΔSOI vuông tại O, có OH là đường cao nên có :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{16}{3a^2} = \frac{19}{3a^2}$$

$$\Rightarrow OH^2 = \frac{3a^2}{19} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{57}}{19}$$

Vậy : $d(O, (SBC)) = \dfrac{a\sqrt{57}}{19}$.

2. Ta có : $\left.\begin{array}{l} AD \,//\, BC \\ BC \subset (SBC)\end{array}\right\} \Rightarrow AD \,//\, (SBC)$ và có $SB \subset (SBC)$

$\Rightarrow d(AD, SB) = d(AD, (SBC)) = d(J, (SBC))$ (với $J = OI \cap AD$

Theo chứng minh trên có : $(SOI) \perp (SBC)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{hay : } (SIJ) \perp (SBC)\\ \text{và có } (SIJ) \cap (SBC) = SI\\ \text{Từ J vẽ } JK \perp SI \text{ tại K.}\end{array}\right\} \Rightarrow JK \perp (SBC) \text{ hay } JK = d(J, (SBC)).$$

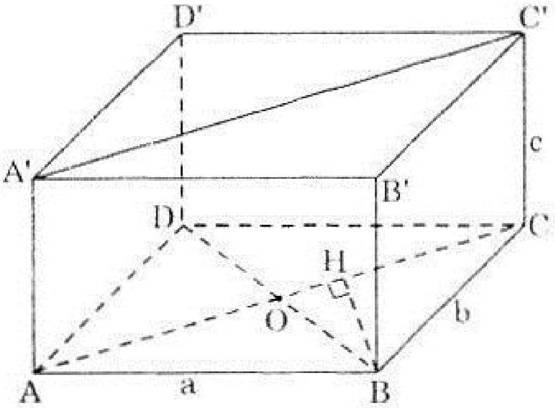
$$\left.\begin{array}{l}\text{Vì } JK \perp (SBC)\\ OH \perp (SBC)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} JK \,//\, OH \text{ mà O là trung điểm của IJ} \\ \text{(do O là tâm đối xứng của hình thoi)}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ OH là đường trung bình của ΔSIJ

$$\Rightarrow JK = 2OH = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$$

Vậy : $d(J, (SBC)) = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19} \quad \Rightarrow d(AD, SB) = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Bài 2.



1. Ta có :

$$\left.\begin{array}{l}(ABCD) \perp (AA'C'C)\\ (ABCD) \cap (AA'C'C) = AC\\ \text{Từ B vẽ } BH \perp AC \text{ tại H.}\end{array}\right\} \Rightarrow BH \perp (AA'C'C) \text{ tại H}$$

$\Rightarrow BH = d(B, (AA'C'C)$

Xét ΔABC vuông tại B có BH là đường cao, nên có :

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$

$$\Rightarrow BH^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \quad \Rightarrow BH = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Vậy : $d(B, (AA'C'C) = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

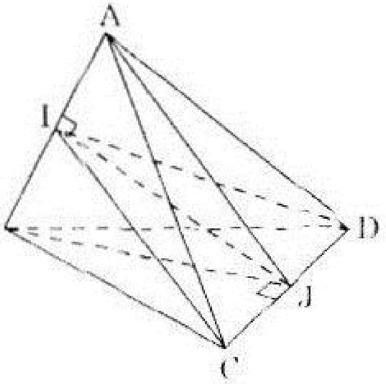
2. Ta có : $BB' \,//\, AA'$ mà $AA' \subset (AA'C'C)$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow BB' \,//\, (AA'C'C)\\ \text{và có : } AC \subset (AA'C'C)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow d(BB', AC') = d(BB', (AA'C'C)) = d(B, (AA'C'C)) = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Bài 3. Ta tính d (AB, CD).

Gọi I là trung điểm của AB và J là trung điểm của CD.



Vì $\Delta ABC = \Delta ADB$

$\Rightarrow CI = DI$ (hai đường trung tuyến tương ứng)

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \Delta CDI \text{ cân tại } I\\ \text{Mà } IJ \text{ là đường trung tuyến của } \Delta CDI\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow IJ \perp CD \text{ tại } J.\\ \text{Chứng minh tương tự : } IJ \perp AB \text{ tại } I\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow IJ$ là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

Vậy : $IJ = d(AB, CD)$

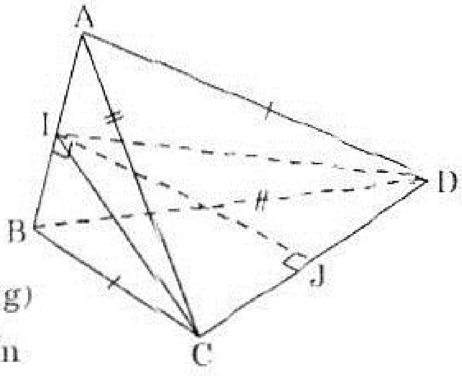
Xét ΔBIJ vuông tại I, nên có :

$$IJ = \sqrt{BJ^2 - BI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy : $d(AB, CD) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Hoàn toàn tương tự ta có : $d(BC, AD) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $d(AC, BD) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Bài 4. • Giả sử $AC = BD$ và $AD = BC$, ta chứng minh IJ là đường vuông góc chung của AB và CD.



Xét hai tam giác ABC và ABD có :

$$\left.\begin{array}{l}AB : \text{cạnh chung}\\ AC = BD \text{ và } BC = AD\end{array}\right| \Rightarrow \Delta ABC = \Delta ABD$$

$\Rightarrow CI = DI$ (hai đường trung tuyến tương ứng)

$\Rightarrow \Delta ICD$ cân tại I có IJ là đường trung tuyến

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow IJ \perp CD\\ \text{Chứng minh tương tự : } IJ \perp AB\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow IJ$ là đường vuông góc chung của AB và CD.

- Giả sử IJ là đường vuông góc chung của AB và CD, ta chứng minh :

  $AC = BD$ và $BC = AD$.

Vì AJ là trung tuyến của ΔACD, nên có :

$$AC^2 + AD^2 = 2AJ^2 + \frac{CD^2}{2} \qquad (a)$$

Và BJ là trung tuyến của ΔBCD, nên có :

$$BC^2 + BD^2 = 2BJ^2 + \frac{CD^2}{2} \qquad (b)$$

Vì IJ là đường vuông góc chung của AB và CD nên có :

$$\left.\begin{array}{ll} AJ^2 = IJ^2 + AI^2 & \text{(xét } \Delta AIJ \text{ vuông tại I)} \\ BJ^2 = IJ^2 + BI^2 & \text{(xét } \Delta BIJ \text{ vuông tại I)} \\ \text{mà } AI = BI & \text{(do I là trung điểm AB)} \end{array}\right\} \Rightarrow AJ^2 = BJ^2 \qquad \text{(c)}$$

Từ (a), (b) và (c) có : $AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2$

Chứng minh tương tự có : $BC^2 + AC^2 = BD^2 + AD^2$

Vậy có : $\begin{cases} AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2 \\ BC^2 + AC^2 = BD^2 + AD^2 \end{cases}$ (d)

Cộng vế với vế ta được :

$$2AC^2 + BC^2 + AD^2 = 2BD^2 + BC^2 + AD^2$$

$\Rightarrow AC^2 = BD^2 \Rightarrow AC = BD$ thay vào (d) cho ta :

$BC^2 = AD^2 \Rightarrow BC = AD.$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng :

A. I là trung điểm AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

B. I là trung điểm AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$

C. I là trung điểm AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

D. I là trung điểm AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{IB}$.

Câu 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD và M là điểm bất kì, ta có :

A. $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$

B. $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$

C. $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$

D. $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$.

Câu 3. Mệnh đề nào sau đây là đúng :

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì chéo nhau.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

Câu 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD) với SA = $a\sqrt{3}$. Góc của hai đường thẳng BC và SD bằng :

A. 90^0 B. 60^0 C. 30^0 D. 45^0.

Câu 5. Mệnh đề nào sau đây là đúng :

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng vuông góc nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

C. Hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

D. Qua đường thẳng a vuông góc với một mặt phẳng (P) có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với mặt phẳng (P).

Câu 6. Cho hình chóp S.ABCD có mặt bên SAB là tam giác đều và (SAB) ⊥ (ABCD). Gọi I là trung điểm của AB, mệnh đề nào sau đây là sai :

A. SI không vuông góc với CD. B. ΔSBC vuông tại B.

C. ΔSIC vuông tại I. D. ΔSAD vuông tại A.

Câu 7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông, mệnh đề nào sau đây là sai :

A. S.ABCD là hình chóp đều nếu chân đường cao vẽ từ S trùng với tâm của đáy ABCD.

B. S.ABCD là hình chóp đều nếu các mặt bên của nó là những tam giác có diện tích bằng nhau.

C. S.ABCD là hình chóp đều nếu các cạnh bên của nó bằng nhau.

D. S.ABCD là hình chóp đều nếu các mặt bên của nó là tam giác cân với đỉnh là S.

Câu 8. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, đáy ABC có cạnh là a và O là tâm, đường cao có độ dài bằng $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là :

A. 135^0 B. 60^0 C. 30^0 D. 45^0.

Câu 9. Đường thẳng Δ là đường vuông góc chung hai hai đường thẳng chéo nhau a và b. Tìm mệnh đề đúng.

A. Δ cắt a và b, đồng thời Δ vuông góc với cả a và b.

B. Δ vuông góc với a và b.

C. Δ cắt a, đồng thời Δ vuông góc cả a và b.

D. Δ cắt a và b.

Câu 10. Cho tứ diện ABCD có AB ⊥ (BCD) và BCD là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng :

A. a B. $\frac{a}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

- *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B; AD = 2a, AB = BC = a; SA ⊥ (ABCD) sao cho SA = $a\sqrt{2}$.*

  Dùng giả thiết trên để trả lời các câu 11, 12, 13 và 14.

Câu 11. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng :

A. 2a B. a C. $a\sqrt{2}$ D. $a\sqrt{3}$.

Câu 12. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau :

A. ΔACD vuông tại C. B. ΔSBC vuông tại B.

C. ΔSAC vuông tại A. D. ΔSCD không là Δ vuông.

Câu 13. Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) có số đo bằng :

A. 45^0 B. 30^0 C. $\arccos\frac{1}{3}$ D. 60^0.

Câu 14. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SB bằng :

A. $a\sqrt{3}$ B. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ C. a D. $a\sqrt{2}$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. C 2. A 3. D 4. B 5. C

6. A 7. B 8. D 9. A 10.C

11.B 12.D 13.A 14.C

Chương III. KHỐI ĐA DIỆN

CHỦ ĐỀ 18. Khái niệm về khối đa diện

1. Khối lăng trụ và khối chóp

- *Khối lăng trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ và kể cả hình lăng trụ ấy.*
- *Khối chóp là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp kể cả hình chóp ấy.*
- *Khối chóp cụt là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp cụt và kể cả hình chóp ấy.*

a) Kí hiệu

Khối lăng trụ hay khối chóp được đặt tên theo tên của hình lăng trụ hay hình chóp giới hạn nó.

Ví dụ : Hình lăng trụ ABC.A'B'C' ứng với khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

Hình chóp S.ABCD ứng với khối chóp S.ABCD.

b) Các yếu tố liên quan

- *Đỉnh, cạnh, mặt, mặt bên, mặt đáy, cạnh bên, cạnh đáy... của một hình lăng trụ (hình chóp, hay hình chóp cụt) theo thứ tự là đỉnh, cạnh, mặt, mặt bên, mặt đáy, cạnh bên, cạnh đáy... của khối lăng trụ (khối chóp, hay khối chóp cụt) tương ứng.*
- *Điểm không thuộc khối lăng trụ được gọi là* ***điểm ngoài*** *của khối lăng trụ. Điểm thuộc khối lăng trụ nhưng không thuộc hình lăng trụ ứng với khối lăng trụ đó được gọi là* ***điểm trong*** *của khối lăng trụ.*
- *Điểm trong, điểm ngoài khối chóp, khối chóp cụt cũng được định nghĩa tương tự.*

2. Khái niệm về hình đa diện và khối đa diện

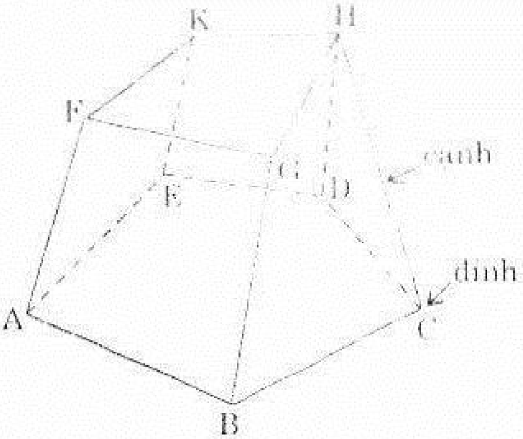
a) Khái niệm hình đa diện

Hình đa diện (gọi tắt là đa diện) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn 2 tính chất sau :

(i) Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không giao nhau hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.

(ii) Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

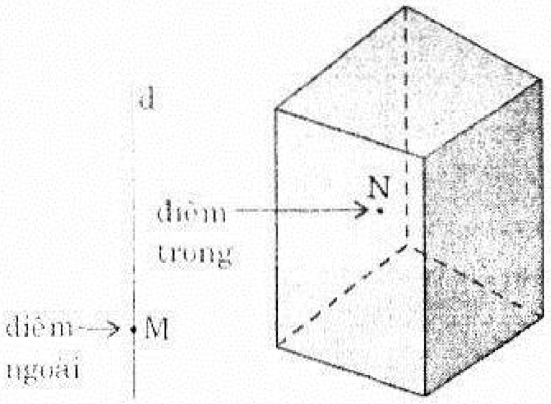
Chú ý : *Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự được gọi là các đỉnh, cạnh của hình đa diện.*



Hình đa diện

b) Khái niệm về khối đa diện

- *Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.*
- ***Các yếu tố***



  - *Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là điểm ngoài của khối đa diện.*
  - *Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện ứng với khối đa diện ấy được gọi là điểm trong của khối đa diện.*

  Tập hợp các điểm trong được gọi là miền trong, tập hợp các điểm ngoài được gọi là miền ngoài của khối đa diện.

  - *Mỗi khối đa diện được xác định bởi hình đa diện ứng với nó. Ta cũng gọi đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài... của hình đa diện tương ứng.*
  - *Mỗi hình đa diện chia các điểm còn lại của không gian thành hai miền không giao nhau là : miền trong và miền ngoài của hình đa diện; trong đó chỉ có miền ngoài là chứa toàn bộ một đường thẳng nào đó.*

3. Phân chia và lắp ghép các khối đa diện :

Nếu khối đa diện H là hợp của 2 khối đa diện H_1 và H_2 sao cho H_1 và H_2 không có điểm chung, lúc đó ta nói :

Có thể chia được khối đa diện H thành 2 khối đa diện H_1 và H_2, hay có thể lắp ghép 2 khối đa diện H_1 và H_2 với nhau để được khối đa diện H.

Bài 1. Chứng minh rằng một đa diện (H) có các mặt là những tam giác thì tổng số các mặt của nó phải là một số chẵn. Cho ví dụ.

Giải

Giả sử (H) có m mặt là $M_1, M_2, ..., M_m$

Vì mỗi mặt M_i $(i = 1, 2, ..., m)$ có 3 cạnh

Và do mỗi cạnh của (H) là cạnh chung của đúng 2 mặt nên ta có tổng số cạnh của (H) là $\frac{3m}{2}$

$\Rightarrow \frac{3m}{2}$ là số nguyên $\Rightarrow$ m chia hết cho 2 $\Rightarrow$ m là số chẵn.

Vậy tổng số mặt của (H) là số chẵn.

Ví dụ : Khối tứ diện ABCD có các mặt là những tam giác và có tất cả 4 mặt.

Bài 2. Chứng minh rằng một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của ba cạnh thì số đỉnh của nó phải là một số chẵn.

Giải

Gọi $m_đ$ là số đỉnh của đa diện và n_c là số cạnh của đa diện.

Vì mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh, và với 2 đỉnh là được một cạnh nên ta có : $2n_c = 3m_đ$ (*)

$$\Rightarrow n_c = \frac{3}{2}m_đ$$

Vì : n_c là số nguyên $\Rightarrow 2n_c$ là số chẵn

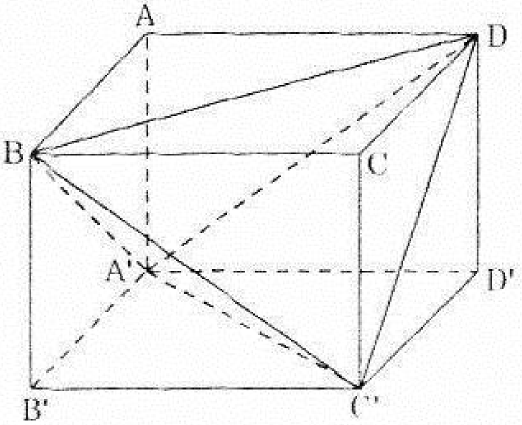
$\Rightarrow 3m_đ$: số chẵn (do (*))

$\Rightarrow m_đ$ là một số chẵn.

Vậy số đỉnh của đa diện là một số chẵn.

Bài 3. Hãy chia khối lập phương thành năm khối tứ diện.

Giải



Khối lập phương ABCD.A'B'C'D' được phân chia thành năm khối tứ diện như sau : ABDA', CBDC', B'A'C'B, D'A'C'D và BDA'C'.

Bài 4. Chứng minh rằng nếu một đa diện H có các mặt là những hình đa giác có số lẻ cạnh thì tổng số các mặt của nó phải là một số chẵn.

Bài 5. Hãy chia khối tứ diện ABCD thành bốn khối tứ diện bằng hai mặt phẳng.

Hướng dẫn :

Gọi M là điểm trên cạnh AB (M ≠ A và M ≠ B)

N là điểm trên cạnh CD (N ≠ C và N ≠ D)

Hai mặt phẳng chia khối tứ diện là (MCD) và (NAD).

Bài 6. Cho ba đường thẳng a, b, c song song nhưng không đồng phẳng. Trên a, b, c ta lần lượt lấy các đoạn thẳng AA', BB', CC' thỏa điều kiện AA' < BB' < CC'. Hãy chia khối đa diện ABC.A'B'C' thành một khối chóp và một khối lăng trụ.

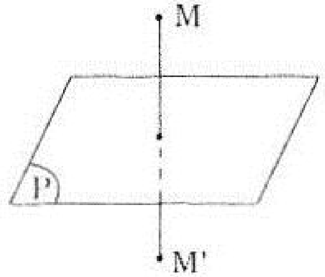
CHỦ ĐỀ 19. Phép đối xứng qua mặt phẳng và sự bằng nhau của các khối đa diện

1. Phép biến hình trong không gian

- *Phép biến hình F trong không gian là một quy tắc để với mỗi điểm M (trong không gian), xác định được điểm M' duy nhất gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình F. Ta còn nói F biến điểm M thành điểm M' và kí hiệu : M' = F(M).*
- *Qua phép biến hình F, mỗi hình H được biến thành hình H' gồm tất cả các ảnh của các điểm thuộc hình H.*

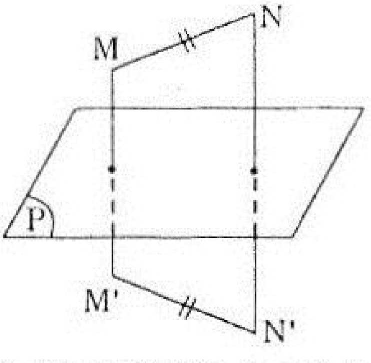
2. Phép đối xứng qua mặt phẳng

- ***Định nghĩa :** Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó và biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM'.*



- ***Định lí :** Nếu phép đối xứng qua mp (P) biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì MN = M'N'.*

  (Vậy : Phép đối xứng qua mặt phẳng là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì).



3. Mặt phẳng đối xứng của một hình

- ***Định nghĩa :** Nếu phép đối xứng qua mp (P) biến hình H thành chính nó thì (P) gọi là mặt phẳng đối xứng của hình H.*

4. Phép dời hình và sự bằng nhau của các hình

a) Định nghĩa

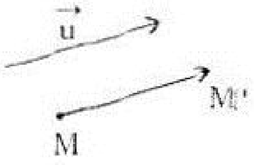
Một phép biến hình F trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Kết quả :

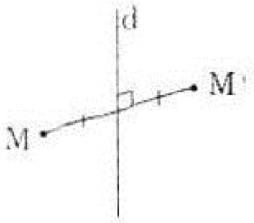
- *Phép dời hình biến đường thẳng thành đường thẳng, mặt phẳng thành mặt phẳng...*
- *Phép đối xứng qua mặt phẳng là phép dời hình. Phép đồng nhất (biến mỗi điểm thành chính nó) là phép dời hình.*

b) Một số phép dời hình

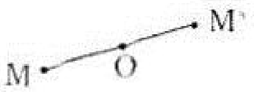
- *Phép đối xứng qua mặt phẳng.*
- *Phép tịnh tiến : Phép tịnh tiến theo vectơ* $\vec{u}$ *là phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' sao cho* $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



- *Phép đối xứng qua đường thẳng (phép đối xứng qua trục) : Cho đường thẳng d, phép đối xứng qua đường thẳng d là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc d thành chính nó và biến mỗi điểm không thuộc d thành điểm M' sao cho d là đường trung trực của đoạn MM'.*



- *Phép đối xứng qua một điểm (còn gọi là phép đối xứng qua tâm) : Cho điểm O, phép đối xứng qua điểm O là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho* $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$.



c) Hai hình bằng nhau

- ***Định nghĩa :*** *Hai hình H và H' được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.*
- ***Định lí :*** *Hai hình tứ diện ABCD và A'B'C'D' bằng nhau nếu chúng có các cạnh tương ứng bằng nhau, nghĩa là AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DA = D'A', AC = A'C', BD = B'D'.*

Kết quả :

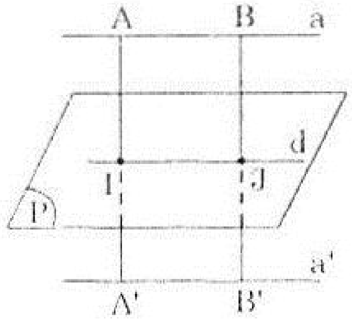
- *Hai tứ diện đều có cạnh bằng nhau thì bằng nhau.*
- *Hai hình lập phương có cạnh bằng nhau thì bằng nhau.*

Bài 1. Gọi Đ là phép đối xứng qua mặt phẳng (P) và a là một đường thẳng nào đó. Giả sử Đ biến đường thẳng a thành đường thẳng a'. Trong trường hợp nào thì :

1. a trùng với a' 2. a // a'

3. a cắt a' 4. a và a' chéo nhau ?

Giải

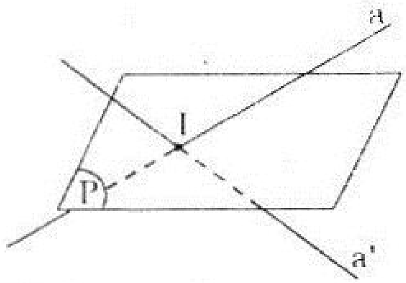


1. Ta có $a \equiv a'$ khi :

   - hoặc $a \subset (P)$, vì Đ(M) = M, $\forall M \in a$
   - hoặc $a \perp (P)$, vì nếu Đ(M) = M'

     thì $M' \in a$, $\forall M \in a$.

2. Ta có a // a' khi a // (P).



3. Ta có a cắt a' khi a cắt (P) tại I.

   Vì lúc đó Đ(I) = I và a' qua I = Đ(I),

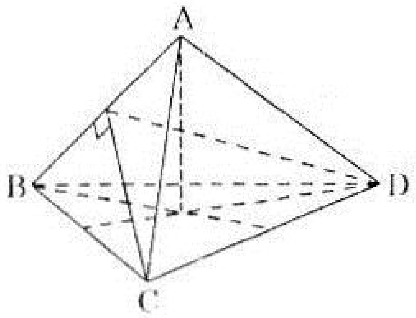
   tức a' qua I.

   Vậy a và a' cắt nhau tại I.

4. a và a' chéo nhau : không có trường hợp này xảy ra.

Bài 2. Tìm tất cả các mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều ABCD.

Giải



Giả sử (P) là mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều ABCD, tức phép đối xứng Đ qua (P) biến {A, B, C, D} thành chính nó. Và vì Đ không thể biến mỗi đỉnh thành chính nó (vì lúc đó Đ là phép đồng nhất), nên phép đối xứng Đ biến một đỉnh thành một đỉnh khác.

Giả sử Đ biến A thành B ⇒ (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

$$\text{Và vì } \begin{cases} CA = CB \\ DA = DB \end{cases} \Rightarrow C, D \in (P) \Rightarrow Đ : \begin{cases} A \mapsto B \\ C \mapsto C \\ D \mapsto D \\ B \mapsto A. \end{cases}$$

⇒ Đ biến tứ diện ABCD thành chính nó.

Vậy tứ diện đều ABCD có sáu mặt phẳng đối xứng, đó là các mặt phẳng trung trực của các cạnh.

Bài 3. Tìm các mặt phẳng đối xứng của hình chóp tứ giác đều S.ABCD.

Giải

Giả sử (P) là mặt phẳng đối xứng của hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Tức phép đối xứng Đ qua (P) biến {S, A, B, C, D} thành chính nó và vì

Đ không thể biến mỗi đỉnh thành chính nó (vì lúc đó Đ là phép đồng nhất), nên phép đối xứng Đ biến một đỉnh thành đỉnh khác.

* Giả sử Đ biến A thành C $\Rightarrow$ (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AC

và vì có : $\begin{cases} DA = DC \\ BA = BC \\ SA = SC \end{cases} \Rightarrow S, B, D \in (P).$

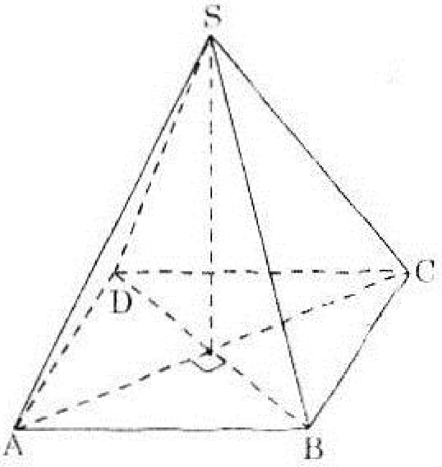
Vậy Đ(A) = C; Đ(S) = S; Đ(B) = B;

Đ(D) = D; Đ(C) = A

$\Rightarrow$ Phép đối xứng qua mp (P) biến hình chóp S.ABCD thành chính nó.

$\Rightarrow$ (P) là mặt phẳng đối xứng của hình chóp S.ABCD.

Có hai mặt phẳng đối xứng loại này.



* Giả sử Đ biến A thành B $\Rightarrow$ (P') là mặt phẳng trung trực của đoạn AB, ta cũng chứng minh được (P') là mặt phẳng trung trực đoạn CD.

Ta có : SA = SB $\Rightarrow$ S $\in$ (P').

Vậy Đ(A) = B; Đ(D) = C; Đ(S) = S; Đ(B) = A; Đ(C) = D

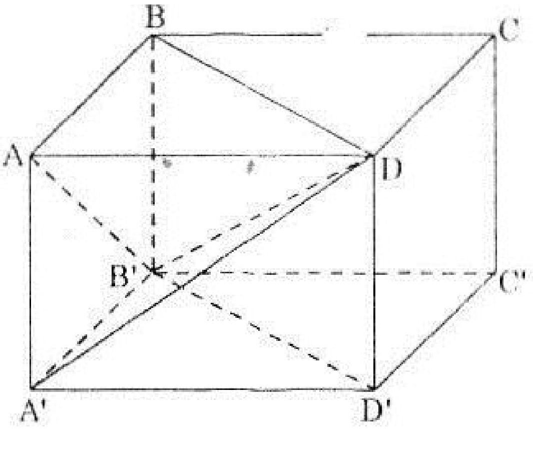
$\Rightarrow$ (P') là mặt phẳng đối xứng của hình chóp S.ABCD.

Có hai mặt phẳng đối xứng loại này.

Vậy hình chóp tứ giác đều S.ABCD có bốn mặt phẳng đối xứng.

Bài 4. Chia khối lập phương ABCD.A'B'C'D' thành sáu khối tứ diện bằng nhau.

Giải



- Trước tiên ta chia khối lập phương ABCD.A'B'C'D' thành hai khối lăng trụ bởi mặt phẳng (BDD'B').
- Tiếp theo ta chia mỗi khối lăng trụ ABD.A'B'D' và BCD.B'C'D' thành ba khối tứ diện bằng nhau.

- Xét khối lăng trụ ABD.A'B'D', ta chia thành ba khối tứ diện : ABDB', DAA'B', DD'A'B'.
- Xét khối lăng trụ BDC.B'D'C' ta chia khối này thành ba khối tứ diện : BC'DB', DCC'B', DD'C'B'.

- Ta chứng minh sáu khối tứ diện đó bằng nhau.

Hai khối tứ diện ABDB' và DAA'B' đối xứng qua mp (ADB').

Thật vậy, ta có :

$A'B \perp AB'$ (do ABB'A' là hình vuông)

$A'B \perp AD$ (do tính chất hình lập phương)

$\Rightarrow A'B \perp (ADB')$ tại trung điểm của A'B

$\Rightarrow$ (ADB') là mặt phẳng trung trực của A'B.

Vậy phép đối xứng qua (ADB') biến A' thành B, A thành A, D thành D, B' thành B'.

$\Rightarrow$ Phép đối xứng qua mp (ADB') biến khối tứ diện DAA'B' thành khối tứ diện DABB'.

$\Rightarrow$ Hai khối tứ diện DAA'B' và ABDB' bằng nhau.

Chứng minh tương tự hai khối tứ diện DAA'B' và DD'A'B bằng nhau do đối xứng qua mp (A'B'D).

Chứng minh tương tự hai khối lăng trụ ABD.A'B'D' và BCD.B'C'D' bằng nhau do đối xứng qua mp (BB'D'D).

Vậy sáu khối tứ diện được chia ra từ hình lập phương đã cho bằng nhau.

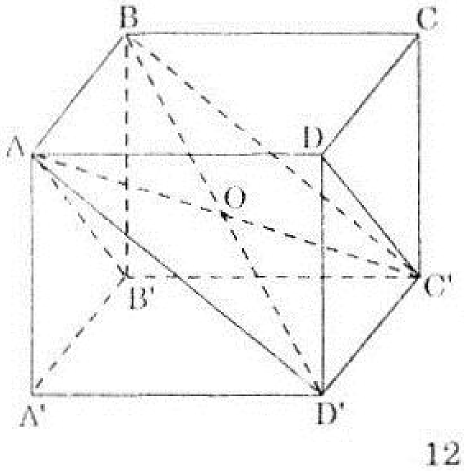
Bài 5. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D', chứng minh rằng :

1. Các hình chóp A.A'B'C'D' và C'.ABCD bằng nhau.
2. Các hình lăng trụ ABC.A'B'C' và AA'D'.BB'C' bằng nhau.

Giải

1. Gọi O là tâm của hình lập phương, nên các đường chéo của ABCD.A'B'C'D' là : AC', BD', B'D, A'C đồng quy tại O và O là trung điểm của các đường chéo đó (tính chất của hình hộp).

Vậy phép đối xứng qua tâm O, biến :



điểm A thành điểm C'

điểm A' thành điểm C

điểm B' thành điểm D

điểm C' thành điểm A

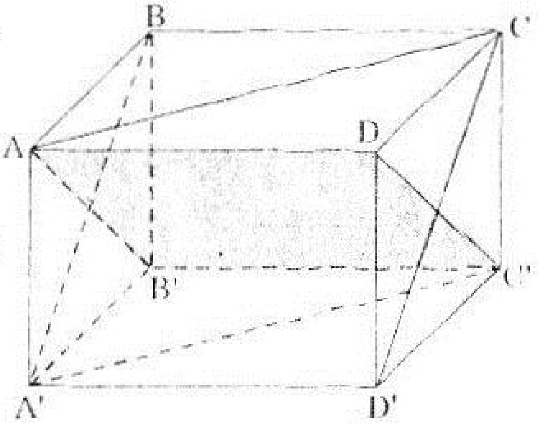
điểm D' thành điểm B.

Suy ra phép đối xứng tâm qua tâm O, biến hình chóp $A.A'B'C'D'$ thành hình chóp $C'.CDAB$.

Mà phép đối xứng qua tâm O là phép dời hình

$\Rightarrow$ Hai hình chóp $A.A'B'C'D'$ và $C'.CDAB$ bằng nhau.

2. Dễ thấy :



- $A'B \perp (ADC'B')$ tại trung điểm của $A'B'$.
- $CD' \perp (ADC'B')$ tại trung điểm của CD'.

Vậy phép đối xứng qua mp $(ADC'B')$ biến :

điểm A thành điểm A (do $A \in (ADC'B')$)

điểm B thành điểm A'

điểm C thành điểm D'

điểm A' thành điểm B

điểm B' thành điểm B' (do $B' \in (ADC'B')$)

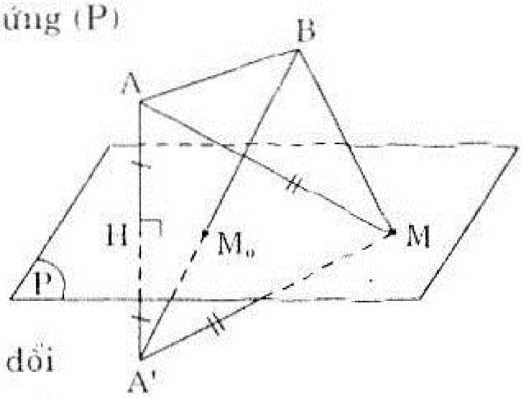
điểm C' thành điểm C' (do $C' \in (ADC'B')$)

Vậy phép đối xứng qua mp $(ADC'B')$ biến hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hình lăng trụ $AA'D'.BB'C'$.

Mà phép đối xứng qua mặt phẳng là phép dời hình $\Rightarrow$ Hai hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và $AA'D'.BB'C'$ bằng nhau.

Bài 6. Cho mặt phẳng (P) và đoạn thẳng AB không có điểm chung với mp (P). Hãy xác định điểm M nằm trên mp (P) sao cho chu vi ΔABM bé nhất.

Giải



Gọi A' là ảnh của điểm A qua phép đối xứng (P)

$\Rightarrow MA = MA'$ (do (P) là mặt phẳng trung trực AA')

Vậy : $MA + MB = MA' + MB$

$\Rightarrow$ Chu vi $\Delta ABM = MA + MB + AB$

$= MA' + MB + AB$

$\geq A'B + AB$ (*) không đổi

Dấu "=" xảy ra cho (*) $\Leftrightarrow$ M, A', B thẳng hàng

$\Leftrightarrow M = A'B \cap (P)$

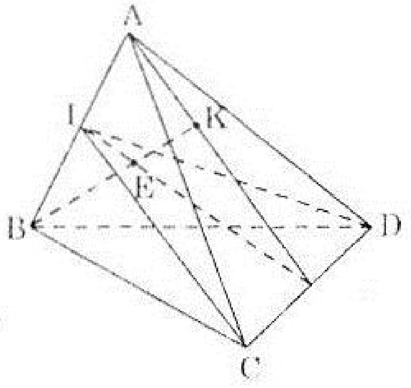
Vậy M là giao điểm của A'B và (P) thì chu vi tam giác ABM bé nhất.

Bài 7. Cho tứ diện đều ABCD.

1. Chứng minh rằng mặt phẳng trung trực của cạnh AB là mặt phẳng đối xứng của tứ diện.

2. Gọi K là điểm bất kì trong ΔACD và E là giao điểm của BK với mặt phẳng đối xứng đó. Chứng minh rằng : $EA + EK \geq AB\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Giải



1. Gọi I là trung điểm của AB

$$\Rightarrow \begin{cases} CI \perp AB \text{ (do } \Delta ABC \text{ là tam giác đều)} \\ DI \perp AB \text{ (do } \Delta ABD \text{ là tam giác đều)} \end{cases}$$

⇒ $AB \perp (CDI)$ tại trung điểm I của đoạn AB.

⇒ (CDI) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

Phép đối xứng qua mp (CDI) biến :

điểm A thành điểm B

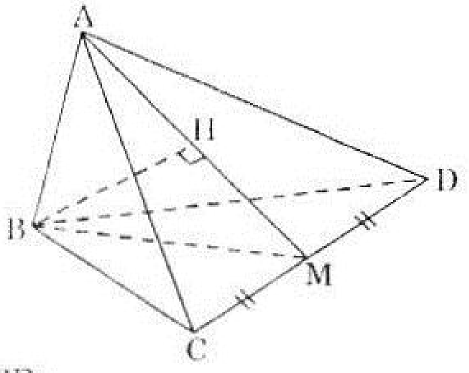
điểm C và D thành chính nó.

⇒ Phép đối xứng qua mp (CDI) biến tứ diện ABCD thành chính nó.

⇒ mp (CDI) là mặt phẳng đối xứng của tứ diện đều ABCD.

2. Vì $E = BK \cap (CDI) \Rightarrow E \in (CDI) \Rightarrow EB = EA$

Vậy : $EA + EK = EB + EK = BK$ (a)



Gọi M là trung điểm của CD

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} CD \perp BM \\ CD \perp AM \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow CD \perp (ABM) \\ \text{Mà } CD \subset (ACD) \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow (ABM) \perp (ACD) \\ \text{Với } (ABM) \cap (ACD) = AM \\ \text{Từ B vẽ } BH \perp AM \text{ tại H} \end{matrix}\right\} \Rightarrow BH \perp (ACD)$$

⇒ AH, CH và DH lần lượt là hình chiếu của các đường xiên BA, BC và BD trên mp (ACD), mà BA = BC = BD

⇒ HA = HC = HD ⇒ H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔACD

⇒ H là trọng tâm ΔACD (do ΔACD là tam giác đều)

$$\Rightarrow AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\frac{CD\sqrt{3}}{2} = \frac{CD\sqrt{3}}{3} = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$$

Xét ΔABH vuông tại H, ta có :

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AB\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{AB^2 - \frac{AB^2}{3}} = \sqrt{\frac{2AB^2}{3}}$$

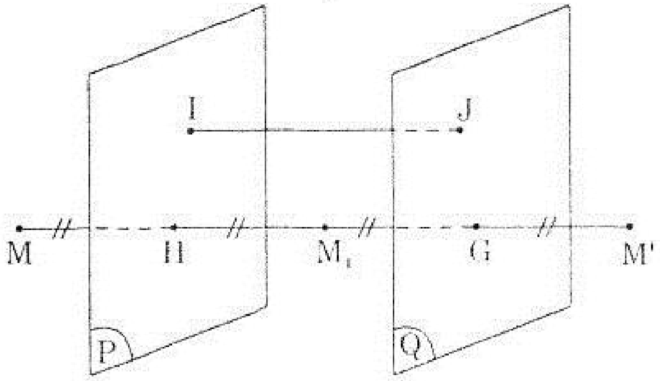
$\Rightarrow BH = AB\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

Mà ta lại có : $BK \geq BH = AB\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ (b)

Từ (a) và (b) cho ta kết quả : $EA + EK \geq AB\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Bài 8. Chứng minh rằng : Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là một phép tịnh tiến.

Giải



Gọi D_P và D_Q là các phép đối xứng lần lượt qua các mặt phẳng (P) và (Q).

Lấy hai điểm I và J lần lượt nằm trên (P) và (Q) sao cho $IJ \perp (P)$.

Gọi M là một điểm bất kì và $\begin{cases} M_1 = D_P(M) \\ M' = D_Q(M_1) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hợp thành của hai phép đối xứng D_P và D_Q biến điểm M thành điểm M'.

Gọi H là trung điểm MM_1, G là trung điểm M_1M'.

$\Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{HM_1} + 2\overrightarrow{M_1G} = 2(\overrightarrow{HM_1} + \overrightarrow{M_1G}) = 2\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{IJ}$

Vậy phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{IJ}$ biến điểm M thành điểm M', hay phép hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là một phép tịnh tiến.

Bài 9. Chứng minh rằng các phép tịnh tiến, phép đối xứng qua tâm là những phép dời hình.

Giải

* Gọi $T_{\vec{v}}$ là phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ và M, N là hai điểm bất kì.

Giả sử : $M' = T_{\vec{v}}(M)$ và $N' = T_{\vec{v}}(N)$

$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \\ \overrightarrow{NN'} = \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} \Rightarrow \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM'} = \overrightarrow{NM'} + \overrightarrow{M'N'}$

$\Rightarrow MN = M'N' \Rightarrow MN = M'N'$

$\Rightarrow$ Phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ là phép dời hình.

Gọi $Đ_O$ là phép đối xứng qua tâm O và M, N là hai điểm bất kì.

Giả sử : $\begin{cases} Đ_O(M) = M' \\ Đ_O(N) = N' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OM + OM' = 0 \\ ON + ON' = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow OM + OM' = ON + ON' \Rightarrow OM - ON = ON' - OM'$

$\Rightarrow NM = M'N' \Rightarrow -MN = M'N' \Rightarrow MN = M'N'$

Vậy phép đối xứng qua tâm O là phép dời hình.

TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 10. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Hãy tìm phép đối xứng qua mặt phẳng

1. biến các điểm A, A', B và D' theo thứ tự thành A, D, B và D'.
2. biến các điểm A, A', B và D' theo thứ tự thành C, C', B và D'.

Đáp số : 1. mp (ABD') 2. mp (BDD'B').

Bài 11. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.

1. Hãy chỉ ra một phép dời hình biến đoạn thẳng AD thành đoạn thẳng A'B'.
2. Chứng minh rằng hai tứ diện ABDA' và BA'B'C' bằng nhau.

Bài 12. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B nằm khác phía đối với mp (P). Hãy tìm điểm M thuộc mp (P) sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất.

Bài 13. 1. Chứng minh phép đối xứng qua trục là phép dời hình.

2. Chứng minh rằng hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau là một phép đối xứng qua đường thẳng.

Hướng dẫn : 2. Phép đối xứng qua đường thẳng $\Delta = (P) \cap (Q)$.

CHỦ ĐỀ 20. – Phép vị tự và sự đồng dạng của các khối đa diện – Các khối đa diện đều

1. Phép vị tự trong không gian

a) Định nghĩa

Cho số k không đổi khác 0 và một điểm O cố định. Phép biến hình trong không gian biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ *gọi là phép vị tự. Điểm O là tâm vị tự và số k gọi là tỉ số vị tự.*

b) *Tính chất*

1. *Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N thành hai điểm M', N' thì* $M'N' = kMN$ *và do đó* $M'N' = |k|MN$.
2. *Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, bốn điểm đồng phẳng thành bốn điểm đồng phẳng.*

Vậy : Phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng, mặt phẳng thành mặt phẳng.

2. Hai hình đồng dạng

Định nghĩa : *Hình H được gọi là đồng dạng với hình H' nếu có một phép vị tự biến hình H thành hình* H_1 *mà hình* H_1 *bằng hình H'.*

3. Khối đa diện đều và sự đồng dạng của các khối đa diện đều

a) *Khái niệm*

Một khối đa diện được gọi là khối đa diện lồi nếu với bất kì hai điểm A và B nào của nó thì mọi điểm của đoạn thẳng AB cũng thuộc khối đó.

b) *Định nghĩa*

Khối đa diện đều là một khối đa diện lồi có hai tính chất sau :

(i) Các mặt là những đa giác đều và có cùng số cạnh.

(ii) Mỗi đỉnh là đỉnh chung của cùng một số cạnh. (Các mặt của khối đa diện đều là những đa giác đều bằng nhau).

c) *Phân loại*

Khối đa diện đều mà mỗi mặt là n-giác đều và mỗi đỉnh là đỉnh chung của p cạnh được gọi là khối đa diện đều loại {n, p}.

d) *Định lí*

Chỉ có 5 loại khối đa diện đều.

Đó là loại {3, 3}, loại {4, 3}, loại {3, 4}, loại {5, 3}, loại {3, 5}.

e) *Bảng tóm tắt*

Loại	*Tên*	*Số đỉnh*	*Số cạnh*	*Số mặt*
{3, 3}	*Khối tứ diện đều*	*4*	*6*	*4*
{4, 3}	*Khối lập phương*	*8*	*12*	*6*
{3, 4}	*Khối tám mặt đều*	*6*	*12*	*8*
{5, 3}	*Khối mười hai mặt đều*	*20*	*30*	*12*
{3, 5}	*Khối hai mươi mặt đều*	*12*	*30*	*20*

Bài 1. Chứng minh rằng phép vị tự biến mặt phẳng (α) thành mặt phẳng (α') song song hoặc trùng với mp (α).

Giải

- Xét phép vị tự tâm O và tỉ số k.

  Trên mp (α) lấy ba điểm cố định A, B, C không thẳng hàng.

  Gọi A', B', C' lần lượt là ảnh của A, B, C qua phép vị tự đó.

  Vì A, B, C không thẳng hàng nên A', B', C' không thẳng hàng ⇒ A', B', C' xác định một mặt phẳng, gọi mặt phẳng đó là mặt phẳng (α').

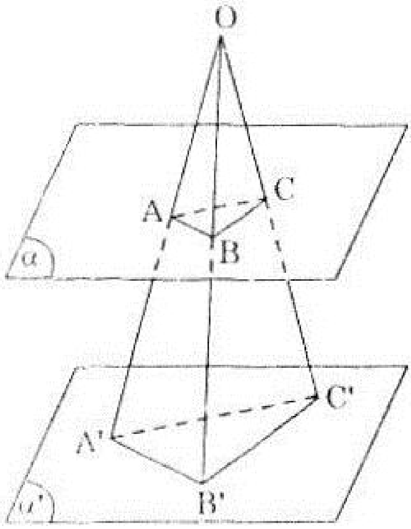
  Gọi M là điểm bất kì sao cho $M \in (\alpha)$ và M' là ảnh của M qua phép vị tự tâm O tỉ số k ⇒ A', B', C' và $M' \in$ mp (α').

  Ngược lại với điểm M' bất kì sao cho $M' \in$ mp (α') ta chứng minh tồn tại điểm $M \in (\alpha)$ sao cho M' là ảnh của M.

  Thật vậy : Với bốn điểm A', B', C' và $M' \in$ mp (α'), phép vị tự tâm O tỉ số $k' = \dfrac{1}{k}$ biến bốn điểm đó thành bốn điểm A, B, C và M thuộc mp (α), điều này chứng tỏ sự tồn tại của điểm M.

- Ta chứng minh $(\alpha) // (\alpha')$ hoặc $(\alpha) \equiv (\alpha')$.

  - Xét k = 1, ta có phép vị tự tâm O, tỉ số k = 1 là phép đồng nhất (biến mỗi điểm thành chính nó) nên $(\alpha) \equiv (\alpha')$.
  - Xét $k \neq 1$, ta có :



$$\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA} \quad \text{(a)}$$

$$\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB} \quad \text{(b)}$$

$$\overrightarrow{OC'} = k\overrightarrow{OC} \quad \text{(c)}$$

Từ (a) và (b) cho ta :

$$\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OB'} = k(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{B'A'} = k\overrightarrow{BA}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow B'A' // BA\\ \text{Mà } BA \subset (\alpha)\end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow B'A' // (\alpha)\\ \text{Tương tự, từ (b) và (c) cho ta : } C'B' // (\alpha)\end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha') // (\alpha).$$

Bài 2. Chứng minh rằng trọng tâm của các mặt của khối tứ diện đều là đỉnh của một khối tứ diện đều.

Giải

Gọi khối tứ diện đều là ABCD, cạnh là a.

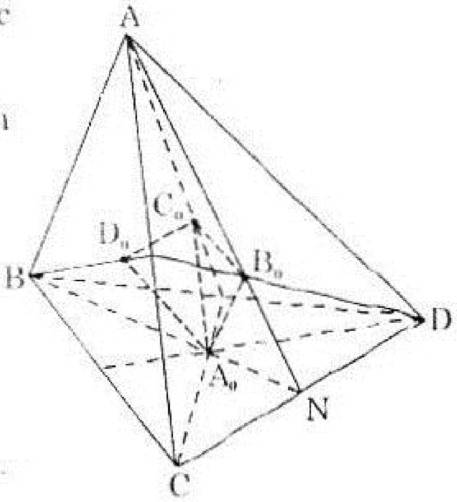
Gọi A_0, B_0, C_0 và D_0 là trọng tâm của các mặt : BCD, ACD, ABD và ABC.

Ta có : A_0, B_0 lần lượt nằm trên trung tuyến BN, AN của hai tam giác ABC, ACD.

$\Rightarrow \dfrac{NA_0}{NB} = \dfrac{NB_0}{NA} = \dfrac{1}{3}$ (do tính chất trọng tâm của tam giác)

$\Rightarrow A_0B_0 \,//\, AB$

$\Rightarrow \dfrac{A_0B_0}{AB} = \dfrac{NA_0}{NB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow A_0B_0 = \dfrac{1}{3}AB = \dfrac{a}{3}$.



Chứng minh tương tự ta được : $A_0D_0 = D_0C_0 = C_0B_0 = A_0C_0 = D_0B_0 = \dfrac{a}{3}$.

Vậy bốn điểm A_0, B_0, C_0, D_0 tạo thành bốn tam giác đều có cạnh là $\dfrac{a}{3}$.

Bốn tam giác đều đó tạo thành một đa diện có bốn đỉnh, mà mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng ba cạnh. Do đó khối đa diện $A_0B_0C_0D_0$ là đa diện đều loại {3, 3} tức là tứ diện đều.

- *Ta giải bài toán này bằng phép vị tự :*

Gọi A_0, B_0, C_0 và D_0 là trọng tâm các mặt BCD, ACD, ABD và ABC; G là trọng tâm của tứ diện.

Xét $V_{\left(G,\,-\frac{1}{3}\right)}$, ta có : $V_{\left(G,\,-\frac{1}{3}\right)}(A) = A_0$; $V_{\left(G,\,-\frac{1}{3}\right)}(B) = B_0$;

$V_{\left(G,\,-\frac{1}{3}\right)}(C) = C_0$; $V_{\left(G,\,-\frac{1}{3}\right)}(D) = D_0$.

$\Rightarrow A_0B_0 = \dfrac{1}{3}AB$; $B_0C_0 = \dfrac{1}{3}BC$; $C_0D_0 = \dfrac{1}{3}CD$; $D_0A_0 = \dfrac{1}{3}DA$;

$A_0C_0 = \dfrac{1}{3}AC$ và $B_0D_0 = \dfrac{1}{3}BD$.

$\Rightarrow$ Mà AB = BC = CD = DA = AC = BD (do tứ diện ABCD là tứ diện đều)

$\Rightarrow A_0B_0 = B_0C_0 = C_0D_0 = D_0A_0 = A_0C_0 = B_0D_0$

$\Rightarrow A_0B_0C_0D_0$ là tứ diện đều.

Bài 3. Cho khối tứ diện đều ABCD. Chứng minh rằng các trung điểm của các cạnh của nó là đỉnh của khối tám mặt đều.

Giải

- Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD, CB, AC, DB.

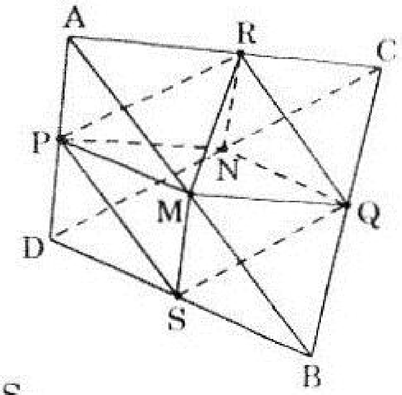
- Ta có : MP là đường trung bình của ΔABD

  $\Rightarrow MP = \frac{BD}{2} = \frac{a}{2}$.

  Chứng minh tương tự : $MS = SP = \frac{a}{2}$

  $\Rightarrow \Delta SPM$ là tam giác đều cạnh $\frac{a}{2}$

  Cũng như vậy : Các tam giác MPR, MRQ, MQS, NPR, NRQ, NQS, NSP là các tam giác đều cạnh $\frac{a}{2}$.



- Tám tam giác đều nói trên tạo thành một đa diện có các đỉnh là S, Q, M, P, N, R; mà mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng bốn tam giác đều. Do đó đa diện ấy là đa diện đều loại {3, 4}, tức là một khối tám mặt đều.

Bài 4. Cho khối tám mặt đều ABCDEF như hình vẽ. Chứng minh rằng :

1. Các đoạn thẳng AF, BD và CE đôi một vuông góc nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.
2. ABFD, AEFC và BCDE là những hình vuông.

Giải

1. Bốn điểm B, C, D và E cách đều hai điểm A và F.

   $\Rightarrow$ B, C, D và E nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn AF.

   Trong mp (BCDE) có : BC = CD = DE = EB

   $\Rightarrow$ BCDE là hình vuông hoặc là hình thoi.

   Mặt khác : AB = AC = AD = AE

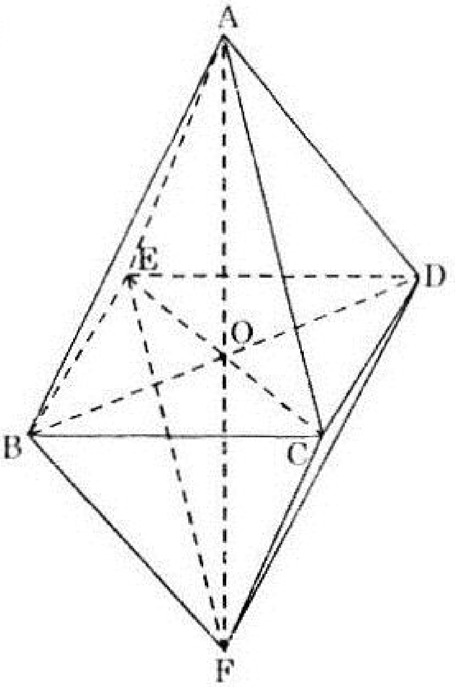
   $\Rightarrow$ A cách đều B, C, D và E

   $\Rightarrow$ BCDE là hình vuông.

   $\Rightarrow CE \perp BD$ và CE cắt BD tại trung điểm O của mỗi đường.

   Chứng minh tương tự cho các cặp : CE và AF; BD và AF.

   Vậy các đoạn thẳng AF, BD và CE đôi một vuông góc nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.



2. Theo chứng minh câu 1, ta có các tứ giác BCDE, ABFD và AEFC là các hình vuông.

Bài 5. Chứng minh rằng tâm các mặt của khối lập phương ABCD.A'B'C'D' là các đỉnh của một khối tám mặt đều.

Giải

Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là tâm của các mặt ABCD, A'B'C'D', ABB'A', CDD'C', BCC'B', ADD'A' và gọi a là cạnh của khối lập phương.

Xét ΔMPR, ta có :

MP là đường trung bình của ΔAB'C

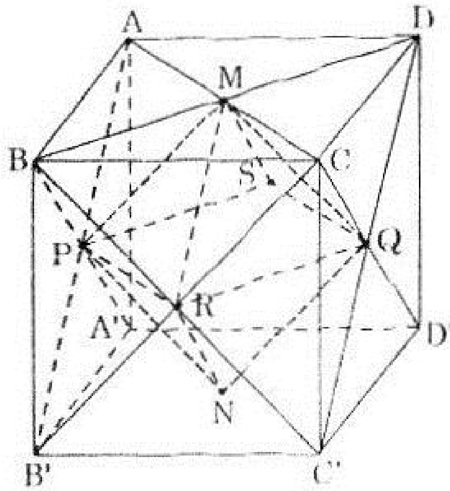
$$\Rightarrow MP = \frac{B'C'}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

PR là đường trung bình của ΔACB'

$$\Rightarrow PR = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

MR là đường trung bình của ΔCAB'

$$\Rightarrow MR = \frac{AB'}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



$\Rightarrow MP = MR = PR \quad \Rightarrow$ ΔMPR là tam giác đều cạnh $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chứng minh tương tự các tam giác : MRQ, MQS, MSP, NPR, NRQ, NQS, NSP là các tam giác đều có cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tám tam giác nêu trên tạo thành một khối đa diện với các đỉnh là M, N, P, Q, R, S và cứ một đỉnh là đỉnh chung của 4 cạnh. Vậy MNPQRS là khối tám mặt đều.

Bài 6. Chứng minh rằng : Tâm các mặt của khối tám mặt đều là đỉnh của một khối lập phương.

Giải

- Gọi tám mặt đều là SABCDS' có cạnh bằng a và gọi M, N, P, Q, M', N', P', Q' lần lượt là trọng tâm của các mặt SAB, SBC, SCD SDA, S'AB, S'BC, S'CD, S'AD.
- Gọi I, J là trung điểm của AB và BC

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{IJ} \\ \text{mà } \overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}.\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

Chứng minh tương tự :

$QP = \frac{1}{3}AC \Rightarrow MN = QP = \frac{1}{3}AC$ (a)

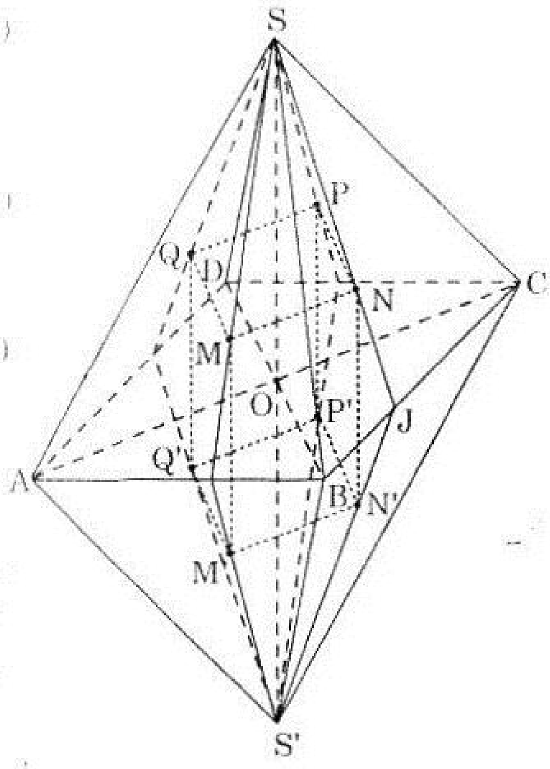
Chứng minh tương tự, ta có :

$$NP = MQ = \frac{1}{3}BD \quad (b)$$

Mà ABCD là hình vuông (do bài 4)

$\Rightarrow AC = BD$ và $AC \perp BD$ (c)

Từ (a), (b) và (c) ⇒ MNPQ là hình vuông có cạnh $MN = \frac{1}{3}AC = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.



- Chứng minh tương tự các mặt MNN'M', M'N'P'Q', PQQ'P', MQQ'M' cũng là những hình vuông có cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Vậy MNPQ.M'N'P'Q' có 6 mặt là 6 hình vuông và mỗi đỉnh M, N, P, Q, M', N', P', Q' là đỉnh chung của 4 cạnh ⇒ MNPQ.M'N'P'Q' là khối đa diện đều loại {4, 3}, tức là khối lập phương.

TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 7. Chứng minh rằng phép vị tự biến mỗi đường thẳng a thành một đường thẳng a' song song hoặc trùng với a.

Bài 8. Cho hình tứ diện ABCD. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Chứng minh rằng hai hình tứ diện ABCD và A'B'C'D' đồng dạng.

CHỦ ĐỀ 21. Thể tích khối chóp

1. Thừa nhận

1. *Hai khối đa diện bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.*
2. *Nếu một khối đa diện được phân chia thành nhiều khối đa diện nhỏ thì thể tích của nó bằng tổng thể tích của khối đa diện nhỏ.*
3. *Khối lập phương có cạnh bằng 1 thì có thể tích bằng 1.*

2. Thể tích khối chóp

$$\boxed{V = \frac{1}{3}S_{đáy} \times h}$$

với $S_{đáy}$: diện tích mặt đáy; h : chiều cao.

Dạng 1. Khối chóp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy

- *Một hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy thì cạnh bên đó chính là chiều cao hình chóp.*
- *Một hình chóp có hai mặt bên kề nhau vuông góc với đáy thì cạnh bên là giao tuyến của hai mặt đó vuông góc với đáy.*

Bài 1. Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, chiều cao SA = a, hai mặt bên SBC và SCD lần lượt tạo với mặt đáy các góc 30^0 và 45^0. Tính thể tích hình chóp.

Giải

Ta có : AB là hình chiếu của SB trên mp (ABCD)

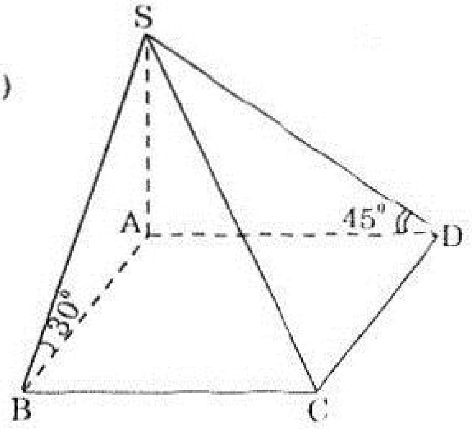
mà AB ⊥ BC (giả thiết)

$\Rightarrow$ SB ⊥ BC (định lí ba đường vuông góc)

Vậy góc giữa mặt bên SBC và mặt đáy ABCD là $(\widehat{SB, AB}) = \widehat{SBA}$

Theo giả thiết có : $\widehat{SBA} = 30^0$

Tương tự góc giữa mặt bên SCD và mặt đáy ABCD là $(\widehat{SD, AD}) = \widehat{SDA}$



Theo giả thiết : $\widehat{SDA} = 45^0$

Vì SA ⊥ (ABCD) và có AB ⊂ (ABCD) $\Rightarrow$ SA ⊥ AB

$\Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại A.

Xét ΔSAB vuông tại A, ta có :

$$\tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} \quad \Rightarrow AB = \frac{SA}{\tan\widehat{SBA}} = \frac{a}{\tan 30^0} = \frac{3a}{\sqrt{3}} = a\sqrt{3}$$

Tương tự, xét ΔSAD vuông tại A, ta có :

$$\tan\widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} \quad \Rightarrow AD = \frac{SA}{\tan\widehat{SDA}} = \frac{a}{\tan 45^0} = a$$

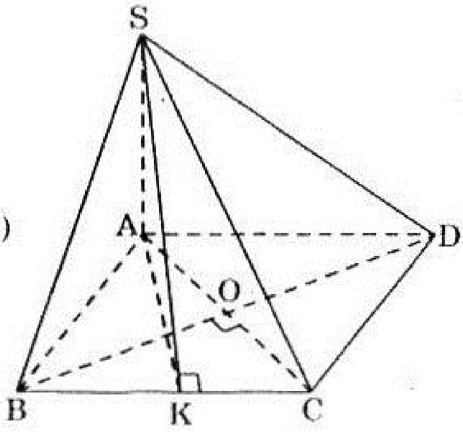
Ta có : $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}AB.AD.SA = \frac{1}{3}a\sqrt{3}.a.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Bài 2. Cho khối chóp S.ABCD có hai mặt bên SAB và SAD cùng vuông góc với mặt đáy; SA = a; đáy ABCD là hình thoi cạnh a và có $\widehat{A} = 120^0$.

1. Tính thể tích hình chóp S.ABCD.
2. Tính khoảng cách từ điểm D đến mp (SBC).

Giải

1. Ta có : $\left.\begin{array}{l}(SAB) \perp (ABCD)\\ (SAD) \perp (ABCD)\\ (SAB) \cap (SAD) = SA\end{array}\right\} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$



Vì ABCD là hình thoi có $\widehat{A} = 120^0$

$\Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều

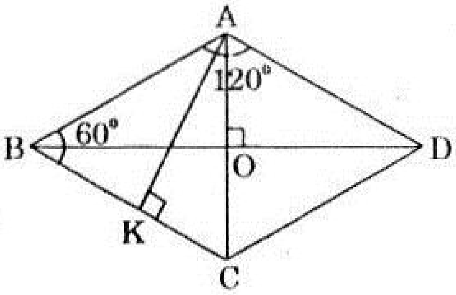
$\Rightarrow AC = a$ và $OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (với $O = AC \cap BD$)

$\Rightarrow AC = a$ và $BD = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{1}{2}a.a\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Vậy : $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

2. Ta có : $V_{S.BCD} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{2}\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$



Ta lại có :

$$V_{S.BCD} = V_{D.SBC} = \frac{1}{3}d\,(D, (SBC)).S_{\Delta SBC}$$

$$\Rightarrow d\,(D, (SBC)) = \frac{3V_{S.BCD}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{3.\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4S_{\Delta SBC}} \qquad (1)$$

$\left.\begin{array}{l}\text{Gọi K là trung điểm cạnh BC, mà } \Delta ABC \text{ là tam giác đều} \Rightarrow AK \perp BC\\ \text{Ta lại có AK là hình chiếu của SK trên mp (ABCD)}\end{array}\right\}$

$\Rightarrow SK \perp BC$.

Xét ΔSAK ta có : $SK^2 = SA^2 + AK^2 = a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{7a^2}{4}$

$$\Rightarrow SK = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

Ta có : $S_{\Delta SBC} = \dfrac{1}{2}SK.BC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{7}}{2}.a = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được : $d\,(D, (SBC)) = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{a^2\sqrt{7}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Bài 3. Cho khối chóp S.ABCD có đường cao SA = a, đáy là tam giác vuông cân có AB = BC = a. Gọi B' là trung điểm của SB, C' là chân đường cao hạ từ A của ΔSAC.

1. Tính thể tích khối chóp S.ABC.
2. Chứng minh rằng SC vuông góc với mp (AB'C').
3. Tính thể tích khối chóp S.AB'C'.

Giải

1. Ta có : $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6}SA.AB.BC = \frac{1}{6}a^3$.

2. Ta có :

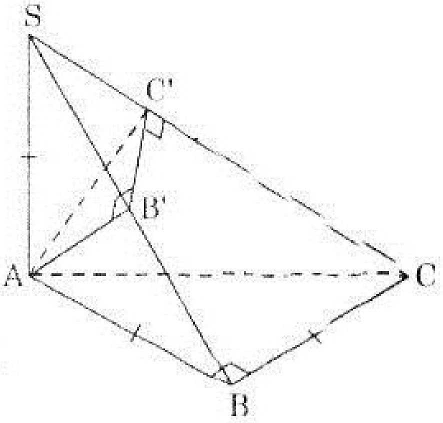
$$\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ \text{mà } BC \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp SA \text{ và có : } BC \perp AB \text{ (gt)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow BC \perp (SAB) \\ \text{mà } AB' \subset (SAB) \end{array}\right\} \Rightarrow AB' \perp BC$$

và có $AB' \perp SB$ (do ΔSAB vuông cân tại A)

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AB' \perp (SBC) \\ SC \subset (SBC) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow SC \perp AB' \\ \text{và có : } SC \perp AC' \text{ (gt)} \end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp (AB'C').$$



3. Ta có : $AB' \perp (SBC)$ (cmt)

mà $B'C' \subset (SBC)$

$\Rightarrow AB' \perp B'C' \Rightarrow \Delta AB'C'$ vuông tại B'.

Ta có : $AB' = \frac{SB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

ΔSAC vuông tại A có đường cao AC' nên có :

$$\frac{1}{AC'^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{3}{2a^2}$$

$$\Rightarrow AC'^2 = \frac{2a^2}{3}.$$

Ta có : $B'C' = \sqrt{AC'^2 - AB'^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{3} - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Ta có : $S_{\Delta AB'C'} = \frac{1}{2}AB'.B'C' = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a\sqrt{12}}{24}$

Mặt khác, xét $\Delta SAC'$ vuông tại C', ta có :

$$SC' = \sqrt{SA^2 - AC'^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Vậy : $V_{S.AB'C'} = \frac{1}{3}.S_{\Delta AB'C'}.SC' = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{12}}{24}.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{36}.$

Bài 4. Cho khối chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C và SA ⊥ (ABC), SC = a.

Hãy tìm góc giữa hai mặt phẳng (SCB) và (ABC) để thể tích khối chóp lớn nhất.

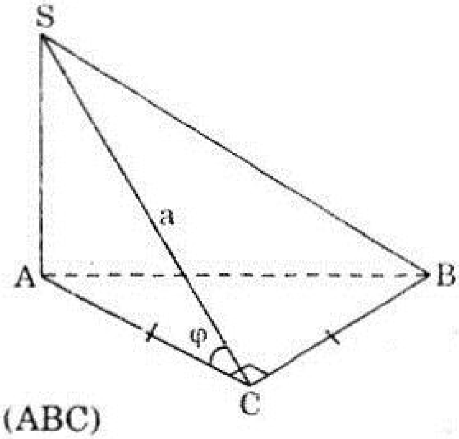
Giải

Ta có : AC là hình chiếu của SC trên mp (ABC)

mà AC ⊥ BC (giả thiết)

$\Rightarrow$ SC ⊥ BC (định lí ba đường vuông góc)

Vậy có : $\left.\begin{matrix} AC \perp BC \\ SC \perp BC \end{matrix}\right\}$



$\Rightarrow$ góc giữa 2 mặt phẳng (SCB) và (ABC) là góc $(\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA}$.

Đặt : $\varphi = \widehat{SCA}$

Ta có : SA ⊥ (ABC) mà AC nằm trong mp (ABC)

$\Rightarrow SA \perp AC$

$\Rightarrow \Delta SAC$ là tam giác vuông tại A.

$$\text{nên có : } \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{SA}{SC} \\ \cos\varphi = \dfrac{AC}{SC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SA = SC.\sin\varphi = a\sin\varphi \\ AC = SC.\cos\varphi = a\cos\varphi = BC \end{cases}$$

$$\text{Ta có : } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}.AC.BC$$

$$= \frac{1}{6}(a\sin\varphi)(a\cos\varphi)^2 = \frac{a^3}{6}\sin\varphi.\cos^2\varphi$$

$$\text{Xét hàm } y = f(\varphi) = \sin\varphi.\cos^2\varphi = \sin\varphi(1 - \sin^2\varphi)$$

$$= \sin\varphi - \sin^3\varphi \quad (\text{với } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$$

Đặt $x = \sin\varphi$ và vì : $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < x < 1$

Hàm $y = f(\varphi)$ trở thành hàm $y = g(x) = x - x^3$ (với $0 < x < 1$)

$$y' = g'(x) = 1 - 3x^2$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ta có bảng biến thiên :

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
$g'(x)$	▨	$+$	0	$-$	▨
$g(x)$	▨ 0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0 ▨

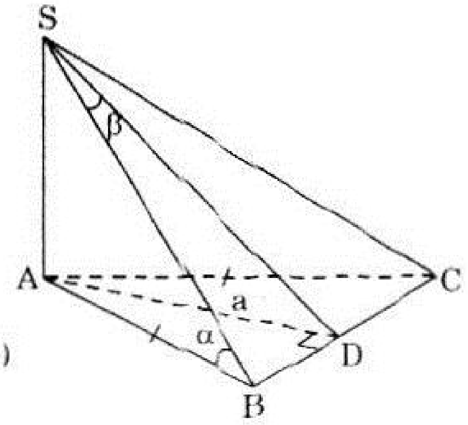
Vậy : $\underset{0<\varphi<\frac{\pi}{2}}{\text{Max}}\, f(x) = \underset{0<x<1}{\max}\, g(x) = g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

hay $V_{S.ABC}$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài 5. Khối chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác ABC cân tại A, độ dài trung tuyến $AD = a$, cạnh bên SB tạo với đáy một góc α và tạo với mặt (SAD) góc β. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

Giải



Ta có AB là hình chiếu của SB trên mp (ABC), nên : $\widehat{SBA} = \alpha$.

$$\text{Mặt khác : } \left.\begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ \text{mà } BD \subset (ABC) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow BD \perp SA$

và có : $BD \perp AD$ (do ΔABC cân tại A)

$\Rightarrow BD \perp (SAD)$

$\Rightarrow$ SD là hình chiếu của SB trên (SAD)

hay $\widehat{BSD} = \beta$.

Ta có : $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}$ (1)

Đặt $SA = h$ $(h > 0)$

Xét ΔSAB vuông tại A (do có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB$)

Ta có : $\sin\alpha = \frac{SA}{SB} \Rightarrow SB = \frac{SA}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin\alpha}$ (2)

Xét ΔSBD vuông tại D (do có $BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp SD$)

$\cos\beta = \frac{SD}{SB} \Rightarrow SB = \frac{SD}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{SA^2 + AD^2}}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{h^2 + a^2}}{\cos\beta}$ (3)

Từ (2) và (3) cho : $\dfrac{h}{\sin\alpha} = \dfrac{\sqrt{h^2+a^2}}{\cos\beta} \Leftrightarrow \dfrac{h^2}{\sin^2\alpha} = \dfrac{h^2+a^2}{\cos^2\beta}$

$\Leftrightarrow h^2\cos^2\beta = h^2\sin^2\alpha + a^2\sin^2\alpha \Leftrightarrow h^2(\cos^2\beta - \sin^2\alpha) = a^2\sin^2\alpha$

$\Leftrightarrow h^2 = \dfrac{a^2\sin^2\alpha}{\cos^2\beta - \sin^2\alpha} \Rightarrow h = \dfrac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}} = SA$

Mặt khác : $SD^2 = SA^2 + AD^2 = \dfrac{a^2\sin^2\alpha}{\cos^2\beta - \sin^2\alpha} + a^2 = \dfrac{a^2\cos^2\beta}{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}$

$$\Rightarrow SD = \frac{a\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}}$$

Xét ΔSBD vuông tại B, ta có : $\tan\beta = \dfrac{BD}{SD}$

$$\Rightarrow BD = SD.\tan\beta = \frac{a\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}}.\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}}$$

$$\Rightarrow BC = 2BD = \frac{2a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}}$$

Vậy : $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AD.BC = \dfrac{1}{2}a.\dfrac{2a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}} = \dfrac{a^2\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}}$

Vậy ta được :

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}}.\frac{a^2\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}} = \frac{a^3\sin\alpha.\sin\beta}{3(\cos^2\beta - \sin^2\alpha)}.$$

Bài 6. **Cho khối chóp S.ABCD có đường cao SA = a, đáy là tam giác vuông cân có AB = BC = a. Gọi B' là trung điểm của SB, C' là chân đường cao hạ từ A của tam giác SAC.**

1. Tính thể tích khối chóp S.ABC. 2. Chứng minh rằng SC ⊥ (AB'C').
3. Tính thể tích khối chóp S.AB'C'.

Giải

1. Ta có : $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{6}SA.AB.AC = \dfrac{1}{6}a.a.a = \dfrac{a^3}{6}$.

2. Ta có : $BC \perp AB$

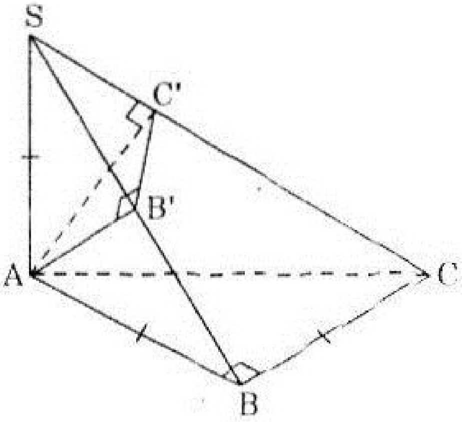
$BC \perp SA$ (do $SA \perp (ABC)$)

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow BC \perp (SAB)\\ \text{mà } AB' \subset (SAB)\end{array}\right\} \Rightarrow AB' \perp BC$$

Mặt khác ΔSAB vuông cân tại A.

Mà AB' là trung tuyến của ΔSAB.

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow AB' \perp SB\\ \text{Mà đã có : } AB' \perp BC\end{array}\right\} \Rightarrow AB' \perp (SBC)$$



lại có : $SC \subset (SBC)$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow SC \perp AB'\\ \text{Mà } SC \perp AC' \text{ (gt)}\end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp (AB'C').$$

3. $\left.\begin{array}{r}\text{Theo chứng minh trên, ta có : } AB' \perp (SBC)\\ \text{mà } B'C' \subset (SBC)\end{array}\right\} \Rightarrow AB' \perp B'C'$

hay $\Delta AB'C'$ vuông tại B'.

Ta lại có : $SC \perp (AB'C')$ hay $SC' \perp (AB'C')$ tại C'.

Vậy : $$V_{S.AB'C'} = \frac{1}{3}SC'.S_{\Delta AB'C'} = \frac{1}{6}SC'.AB'.B'C' \qquad (1)$$

Ta có : $AB' = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

Nhận xét hai tam giác SC'B' và SBC đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{B'C'}{BC} = \frac{SC'}{SB} \Rightarrow B'C' = \frac{BC.SC'}{SB} \qquad (2)$$

Ta có : $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$

Xét ΔSAC vuông tại A có AC' là đường cao, nên có : $SA^2 = SC'.SC$

$$\Rightarrow SC' = \frac{SA^2}{SC} = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ và có } SB = a\sqrt{2}$$

Từ (2) suy ra : $B'C' = \dfrac{a.\dfrac{a}{\sqrt{3}}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$

Và từ (1) cho ta : $V_{S.AB'C'} = \dfrac{1}{6}.\dfrac{a}{\sqrt{3}}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a}{\sqrt{6}} = \dfrac{a^3}{36}.$

TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 7. Cho khối chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật có cạnh AB = a, cạnh SA vuông góc với mặt đáy, cạnh bên SC hợp với đáy góc α và hợp với mặt bên SAB một góc β.

1. Chứng minh rằng : $SC^2 = \dfrac{a^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

2. Tính thể tích khối chóp.

Đáp số : 2. $V = \frac{1}{3}.\frac{a^3\sin\alpha.\sin\beta}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

Bài 8. Cho khối chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, SA = a và SA ⊥ (ABCD). Hai mặt bên SBC và SCD lần lượt tạo với đáy các góc là α, β. Tính thể tích hình chóp S.ABCD.

Đáp số : $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a^3.\cot\alpha.\cot\beta$.

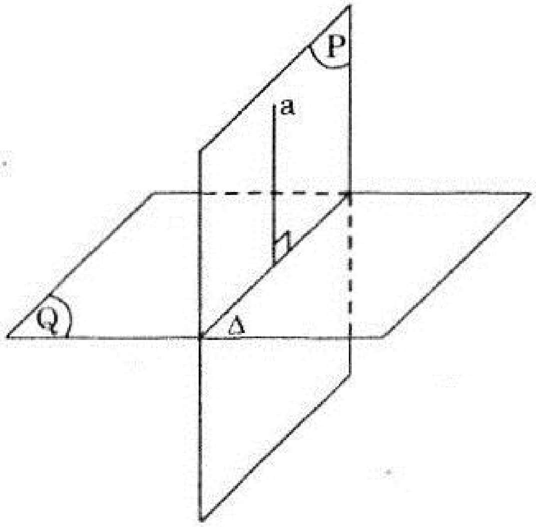
Bài 9. Cho khối chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B có : AB = BC = a. Hai mặt bên SAB, SAC cùng vuông góc với mặt đáy, cho biết $SA = a\sqrt{3}$.

1. Tính góc của (SBC) và (ABC).
2. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC. Tính thể tích khối chóp S.AHK theo a.

Dạng 2. Hình chóp có mặt bên vuông góc với mặt đáy

Để xác định đường cao hình chóp ta vận dụng định lí sau :

$$\left.\begin{array}{l}(P) \perp (Q)\\ (P) \cap (Q) = \Delta\\ a \subset (P)\\ a \perp \Delta\end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (Q).$$



Bài 10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là một tam giác đều và vuông góc với đáy.

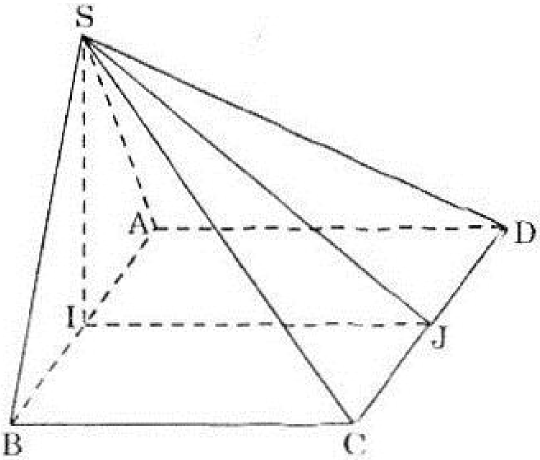
1. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.
2. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

Giải

1. Gọi I là trung điểm của AB, do ΔSAB là tam giác đều.

Suy ra : SI ⊥ AB và $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Mặt khác : }\left.\begin{array}{l}(SAB) \perp (ABCD) \text{ (giả thiết)}\\ (SAB) \cap (ABCD) = AB\\ \text{và } SI \subset (SAB)\\ \text{và có } SI \perp AB\end{array}\right\} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$$



$$\text{Vậy : } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SI.S_{ABCD}$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

2. Ta có : $V_{S.ACD} = \frac{1}{3}SI.S_{ACD}$

$$= \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Vì : }\left.\begin{array}{l}SI \perp (ABCD)\\ \text{mà } IC, ID \subset (ABCD)\end{array}\right\} \Rightarrow SI \perp IC \text{ và } SI \perp ID$$

Vậy các tam giác SIC và SID là các tam giác vuông.

Dễ thấy $\Delta SIC = \Delta SID \Rightarrow SC = SD$

$$\left.\begin{array}{l}\text{hay } \Delta SCD \text{ cân tại S.}\\ \text{Gọi I là trung điểm của CD}\end{array}\right\} \Rightarrow SJ \perp CD$$

Xét ΔSIJ vuông tại I (do $SI \perp (ABCD)$), ta có :

$$SJ^2 = SI^2 + IJ^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{3a^2}{4} + a^2 = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow SJ = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Vậy : } S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2}SJ.DC = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{7}}{2}.a = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{Ta lại có : } V_{S.ACD} = V_{A.SCD} = \frac{1}{3}d(A,(SCD)).S_{\Delta SCD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{7}}{4}.d(A,(SCD))$$

$$\Leftrightarrow d(A,(SCD)) = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

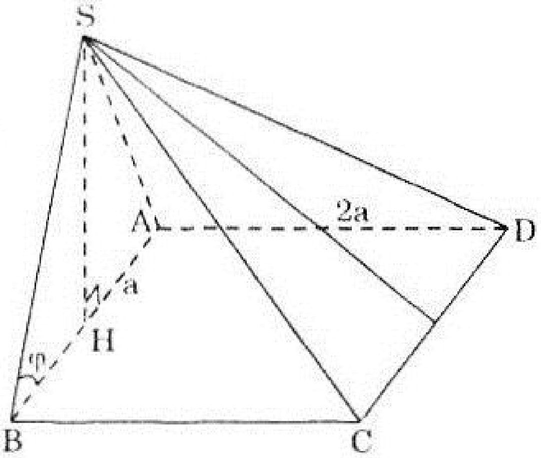
Chú ý : Ta vẫn có thể tính d (A, (SCD)) bằng cách khác :

$$d(A,(SCD)) = d(I,(SCD)).$$

Bài 11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật có AB = a và AD = 2a. Mặt bên SAB là một tam giác vuông tại S và vuông góc với mặt đáy, cho biết góc $\widehat{SBA} = \varphi$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

Giải

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{Từ S vẽ } SH \perp AB \text{ tại } H\\ \text{Và vì có : } \quad (SAB) \perp (ABCD)\\ \qquad\qquad\quad (SAB) \cap (ABCD) = AB\end{array}\right\} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$



Vậy

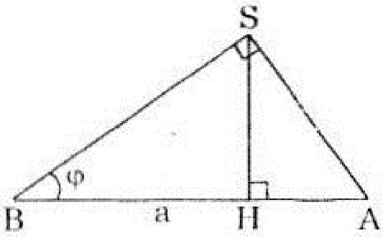
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}SH.AB.AD$$

- Xét ΔSAB vuông tại S, ta có :

$$\cos\varphi = \frac{SB}{AB}$$

$$\Rightarrow SB = AB.\cos\varphi = a\cos\varphi$$

- Xét ΔSBH vuông tại H, ta có :



$$\sin\varphi = \frac{SH}{SB}$$

$$\Rightarrow SH = SB.\sin\varphi = a\cos\varphi\sin\varphi = \frac{1}{2}a\sin 2\varphi$$

$$\text{Vậy : } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a\sin 2\varphi\right).a.2a = \frac{1}{3}a^3\sin 2\varphi.$$

TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 12. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a, mặt bên SAB vuông góc với mặt đáy và hai mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc bằng φ. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

Đáp số : $\quad V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\tan\varphi}{16}.$

Dạng 3. Hình chóp đều

1. Định nghĩa

Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là một đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

2. Kết quả

Trong hình chóp đều :

(i) Đường cao hình chóp qua tâm của đa giác đáy.

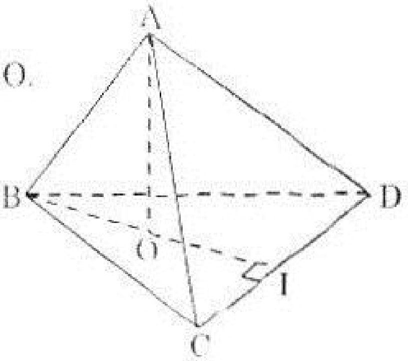
(ii) Các cạnh bên tạo với đáy các góc bằng nhau.

Bài 13. 1. Tính thể tích khối tứ diện đều ABCD cạnh a.

2. Tính thể tích khối bát diện đều SABCDS' cạnh a.

Giải

1. Gọi O là tâm của ΔBCD.



Vì tứ diện là hình chóp đều $\Rightarrow AO \perp (BCD)$ tại O.

Vậy : $V_{ABCD} = \frac{1}{3} AO.S_{BCD}$

Ta có : $BI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (với I là trung điểm CD)

$$BO = \frac{2}{3}BI = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

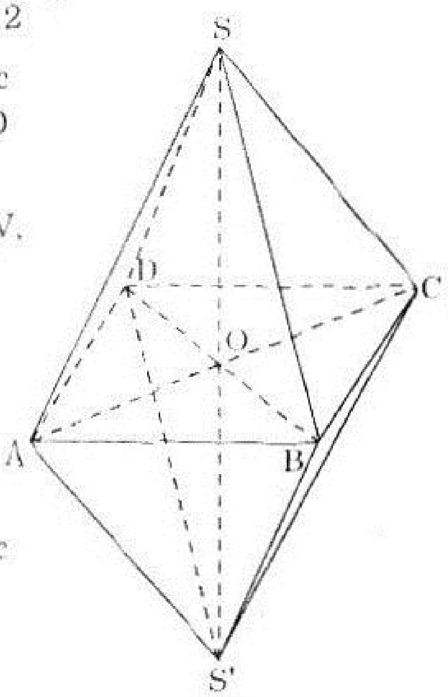
Xét ΔABO vuông tại O, ta có :

$$AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

và có : $S_{BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{18}}{36} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

2. Nhận xét khối bát diện đều SABCDS' được lắp ghép từ hai khối hình chóp đều S.ABCD và S'.ABCD.



Gọi thể tích khối bát diện đều SABCDS' là V, ta có : $V = V_{S.ABCD} + V_{S'.ABCD}$

Ta tính $V_{S.ABCD}$.

Theo bài 4, chủ đề 20 (trang 129), ta có ABCD là hình vuông cạnh a.

Suy ra : $S_{ABCD} = a^2$

và cũng có SS', AC, BD đôi một vuông góc và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

$$\Rightarrow SS' \equiv SO \perp (ABCD).$$

Xét ΔSAO vuông tại O, ta có :

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy : $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

nh tương tự : $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

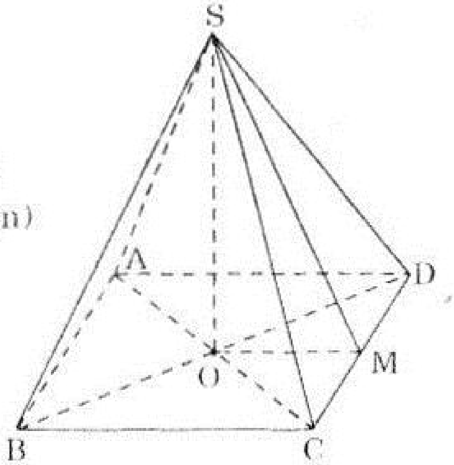
$$\Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} + \frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Bài 1 Cho khối chóp tứ giác đều S.ABCD, cạnh đáy là a và góc giữa mặt
n và mặt đáy là φ. Tính thể tích khối chóp.

Giải

ọi O là tâm của đa giác đáy và M là trung điểm của CD

$$\begin{cases} OM \perp CD \text{ (do ABCD là hình vuông)} \\ SM \perp CD \text{ (do } \Delta SCD \text{ cân tại S)} \end{cases}$$



có : $(SCD) \cap (ABCD) = CD$

Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (ABCD)

$(\widehat{SM, OM}) = \widehat{SMO} = \varphi$ (do $\widehat{SMO}$ là góc nhọn)

t ΔSOM vuông tại O, ta có :

$$\tan\varphi = \frac{SO}{OM}$$

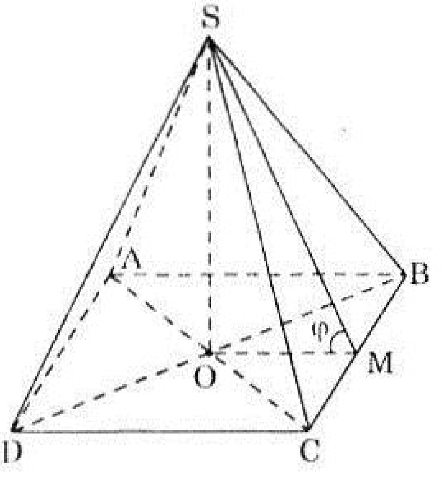
$$\Rightarrow SO = OM.\tan\varphi = \frac{a}{2}\tan\varphi$$

y : $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\tan\varphi\right)a^2 = \frac{a^3}{6}\tan\varphi.$

Bài 1 Cho khối chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên bằng a, mặt bên tạo
i đáy một góc φ.

1. nh cạnh đáy theo a và φ, từ đó suy ra thể tích khối chóp S.ABCD.
2. i giá trị nào của φ thì thể tích khối chóp S.ABCD đạt giá trị lớn nhất.

Giải



1. ọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

gọi M là trung điểm CD $\Rightarrow \begin{cases} OM \perp BC \\ SI \perp BC \end{cases}$

Góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABCD)

góc $(\widehat{SM, OM}) = \widehat{SMO} = \varphi$ (vì $\widehat{SMO}$ là
c nhọn.

t $BC = 2x \Rightarrow OM = x$

t ΔSOM vuông tại O $\Rightarrow \tan\varphi = \frac{SO}{OM} \Rightarrow SO = OM\tan\varphi = x\tan\varphi$ (a)

Xét ΔSOB vuông tại O, ta có :

$$SO^2 = SB^2 - OB^2 = a^2 - (x\sqrt{2})^2 = a^2 - 2x^2 \qquad (b)$$

Từ (a) và (b) cho :

$$x^2\tan^2\varphi = a^2 - 2x^2 \Leftrightarrow (2 + \tan^2\varphi)x^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{2 + \tan^2\varphi} \Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2 + \tan^2\varphi}}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{2a}{\sqrt{2 + \tan^2\varphi}} \text{ và } SO = \frac{a\tan\varphi}{\sqrt{2 + \tan^2\varphi}}$$

Ta có : $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}x.\tan\varphi.(2x)^2 = \frac{1}{3}.4x^3\tan\varphi$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{a}{\sqrt{2 + \tan^2\varphi}}\right)^2.\tan\varphi = \frac{4a^3\tan\varphi}{3\sqrt{(2 + \tan^2\varphi)^3}}.$$

2. Ta có : $V_{S.ABCD} = \frac{4}{3}a^3\frac{\tan\varphi}{\sqrt{(2 + \tan^2\varphi)^3}} = \frac{4a^3}{3}\sqrt{\frac{\tan^2\varphi}{(2 + \tan^2\varphi)^3}}$

Xét : $\frac{\tan^2\varphi}{(2 + \tan^2\varphi)^3} = \frac{\tan^2\varphi}{2 + \tan^2\varphi}.\frac{1}{2 + \tan^2\varphi}.\frac{1}{2 + \tan^2\varphi}$

$$\le \left(\frac{1}{3}\left[\frac{\tan^2\varphi}{2 + \tan^2\varphi} + \frac{1}{2 + \tan^2\varphi} + \frac{1}{2 + \tan^2\varphi}\right]\right)^3$$

(Cauchy cho ba số)

$$\Rightarrow \frac{\tan^2\varphi}{(2 + \tan^2\varphi)^3} \le \frac{1}{27} \Rightarrow \sqrt{\frac{\tan^2\varphi}{(2 + \tan^2\varphi)^3}} \le \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{4a^3}{3}\frac{\tan\varphi}{\sqrt{(2 + \tan^2\varphi)^3}} \le \frac{4a^3}{9\sqrt{3}} \text{ : hằng số} \quad (*)$$

Dấu "=" xảy ra cho (*) $\Leftrightarrow \frac{\tan^2\varphi}{2 + \tan^2\varphi} = \frac{1}{2 + \tan^2\varphi}$

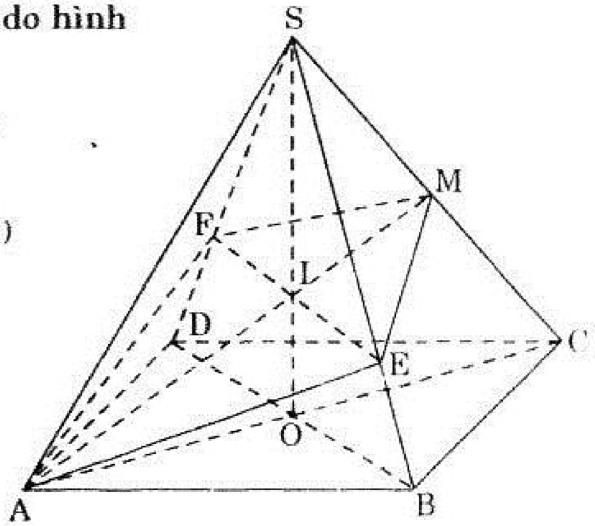
$$\Leftrightarrow \tan^2\varphi = 1 \Leftrightarrow \tan\varphi = 1$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ (vì } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$$

Vậy thể tích khối chóp S.ABCD đạt giá trị lớn nhat ứng với $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Bài 16. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M là trung điểm SC. Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD, cắt SB tại E và cắt SD tại F. Tính thể tích khối chóp S.AEMF.

Giải



Gọi O = AC $\subset$ BD $\Rightarrow$ SO $\perp$ (ABCD) (do hình chóp S.ABCD là hình chóp đều)

Ta có OC là hình chiếu của SC trên mp (ABCD)

$\Rightarrow$ Góc giữa cạnh bên SC và (ABCD) là góc $(\widehat{SC, OC}) = \widehat{SCO} = 60^0$,

mà ΔSAC cân tại S

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \Delta SAC \text{ là tam giác đều}\\ \text{Mà } AM \text{ là trung tuyến của } \Delta SAC\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ AM $\perp$ SC.

Gọi I = SO $\cap$ EF, từ I vẽ đường thẳng d song song BD cắt SB tại E và SD tại F.

Vậy mặt phẳng qua AM và song song với BD chính là mp (AEMF).

Thiết diện của mp (AEMF) và hình chóp là tứ giác AEMF.

Tính diện tích tứ giác AEMF.

$$\text{Ta có : } \left.\begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp SO \text{ (do } SO \perp (ABCD)) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} BD \perp (SAC) \\ AM \subset (SAC) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow BD \perp AM \\ \text{Mà } EF \,/\!/\, BD\end{array}\right\} \Rightarrow EF \perp AM$$

$$\text{Vậy : } S_{AEMF} = \frac{1}{2}AM.EF$$

Ta có AM là đường cao ΔSAC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow AM = \frac{(a\sqrt{2})\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Xét ΔSAC có I là trọng tâm của tam giác đó $\Rightarrow \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3}$

$$\text{Vì } EF \,/\!/\, BD \Rightarrow \frac{EF}{BD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}(a\sqrt{2}) = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Suy ra : } S_{AEMF} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{2a\sqrt{2}}{3} = \frac{a^2\sqrt{12}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Mặt khác : } \left.\begin{array}{l} BD \perp (SAC) \\ SC \subset (SAC) \end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp BD \text{ mà } BD \,//\, EF$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow SC \perp EF \\ \text{Lại có : } SC \perp AM \end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp (AEMF)$$

$$\text{Vậy : } V_{S.AEMF} = \frac{1}{3}SM.S_{AEMF} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}SC\right).S_{AEMF} = \frac{1}{6}a\sqrt{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$$

Dạng 4. Thể tích khối chóp bằng phương pháp tỉ số thể tích

1. Bài toán

Cho hình chóp S.ABC. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S.

Chứng minh rằng : $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}$

Giải

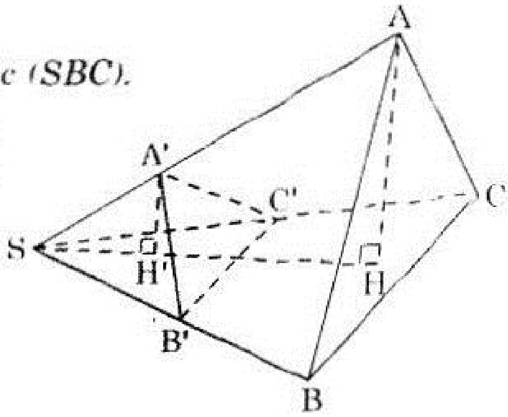
Từ A và A' vẽ A'H' và AH cùng vuông góc (SBC).

Nhận xét ba điểm S, H' và H cùng thuộc hai mặt phẳng (SBC) và (A'H'AH)

⇒ S, H' và H thẳng hàng và ta có :

A'H' // AH.

$\Rightarrow \Delta SA'H' \backsim \Delta SAH \Rightarrow \dfrac{A'H'}{AH} = \dfrac{SA'}{SA}$



$$\text{Xét } \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{\frac{1}{3}A'H'.S_{\Delta SB'C'}}{\frac{1}{3}AH.S_{\Delta SBC}} = \frac{A'H'}{AH}.\frac{\frac{1}{2}SB'.SC'.\sin\alpha}{\frac{1}{2}SB.SC.\sin\alpha} \quad (\text{với } \alpha = \widehat{BSC})$$

$$= \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}.$$

2. Áp dụng

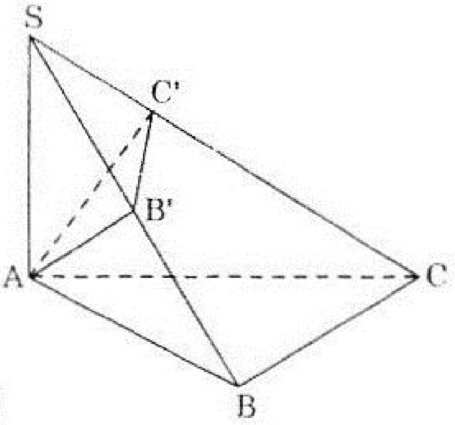
Ta có thể vận dụng bài toán vừa nêu để tính thể tích một khối tứ diện bằng cách dựa trên một khối tứ diện khác, với điều kiện là hai khối đó có cùng một đỉnh và 6 đỉnh còn lại của hai khối đó tạo thành ba cặp tương ứng nằm trên ba đường thẳng cùng qua S.

Bài 17. Cho tứ diện SABC có SA ⊥ (ABC), cho biết SA = 2a. Tam giác ABC là tam giác đều có cạnh bằng a. Trên SB và SC lần lượt lấy các điểm B' và C' sao cho :

$$\frac{SB'}{SB} = \frac{1}{2} \text{ và } \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3}.$$

Tính thể tích khối tứ diện S.AB'C'.

Giải



Ta có : $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}(2a)\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$

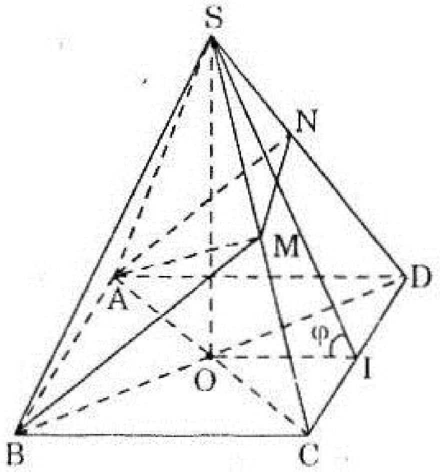
$$= \frac{2a^3\sqrt{3}}{12} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

Ta có : $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow V_{S.AB'C'} = \frac{1}{6}V_{S.ABC} = \frac{1}{6}.\frac{a^3\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}.$$

Bài 18. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc của mặt bên và mặt đáy là φ. Gọi M là trung điểm của SC, mặt phẳng (MAB) cắt SD tại N. Tính theo a và φ thể tích khối chóp S.ABMN.

Giải



Ta có : $\left.\begin{array}{l} MN = (MAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (MAB),\ CD \subset (SCD) \end{array}\right\}$

$\Rightarrow MN \parallel CD \parallel AB.$

Vì MN // CD mà M là trung điểm SC

$\Rightarrow$ MN là đường trung bình của ΔSCD

$\Rightarrow$ N là trung điểm của SD.

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Và gọi I là trung điểm CD $\Rightarrow OI \perp CD$ và $SI \perp CD$

$\Rightarrow$ Góc của mặt bên SCD và đáy ABCD là góc $(\widehat{SI, OI}) = \widehat{SIO} = \varphi$

Xét ΔSOI ta có : $\tan\varphi = \frac{SO}{OI} \Rightarrow SO = OI.\tan\varphi = \frac{a}{2}\tan\varphi$

Vậy : $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\tan\varphi\right)a^2 = \frac{a^3}{6}\tan\varphi$

Dễ thấy : $V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{12}\tan\varphi$

Ta có : $\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB}{SB}.\frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}$ (a)

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad \text{(b)}$$

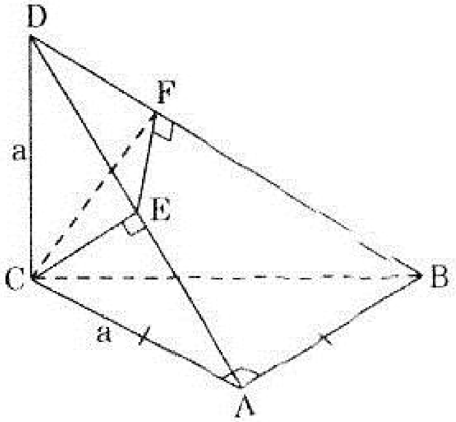
Cộng vế với vế (a) và (b), ta được :

$$\frac{V_{S.ABM} + V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad (\text{do } V_{S.ABC} = V_{S.ACD})$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{3}{4} \Rightarrow V_{S.ABMN} = \frac{3}{4}V_{S.ABC} = \frac{3}{4}.\frac{a^3}{12}\tan\varphi = \frac{a^3\tan\varphi}{16}.$$

Bài 19. Cho ΔABC vuông cân ở A và AB = a. Trên đường thẳng qua C và vuông góc với mp (ABC) lấy điểm D sao cho CD = a. Mặt phẳng qua C vuông góc với BD cắt BD tại F và cắt AD tại E. Tính thể tích khối tứ diện CDEF theo a.

Giải



Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} DB \perp (CEF) \\ CE \subset (CEF) \end{array}\right\} \Rightarrow CE \perp DB \qquad \text{(a)}$$

Ta lại có :

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp DC \ (\text{do } DC \perp (ABC)) \\ AB \perp CA \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AB \perp (ACD) \\ CE \perp (ACD) \end{array}\right\} \Rightarrow CE \perp AB \qquad \text{(b)}$$

Từ (a) và (b) suy ra :

$$\left.\begin{array}{l} CE \perp (DAB) \\ AD \subset (DAB) \end{array}\right\} \Rightarrow CE \perp AD$$

Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} DC \perp (ABC) \\ \text{mà } AC, CB \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow DC \perp CA \text{ và } DC \perp CB$$

hay các tam giác ADC và BCD đều vuông tại C.

Xét ΔDBC vuông tại C, có đường cao là CF, nên có :

$$DC^2 = DF.DB \Rightarrow \frac{DF.DB}{DB^2} = \frac{DC^2}{DB^2} = \frac{DC^2}{DC^2 + BC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{DF}{DB} = \frac{a^2}{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$$

ΔACD vuông cân tại C, có CE là đường cao nên suy ra E là trung điểm của DA, vậy : $\frac{DE}{DA} = \frac{1}{2}$.

Ta lại có : $V_{D.ABC} = \frac{1}{3}DC.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}DC.\left(\frac{1}{2}AC.AB\right) = \frac{1}{6}DC.AC.AB = \frac{1}{6}a^3$

Mặt khác, ta có : $\dfrac{V_{D.CEF}}{V_{D.CAB}} = \dfrac{DC}{DC}.\dfrac{DE}{DA}.\dfrac{DF}{DB} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$

$$\Rightarrow V_{D.CEF} = V_{CDEF} = \frac{1}{6}.V_{D.CAB} = \frac{1}{6}.\left(\frac{1}{6}a^3\right) = \frac{a^3}{36}.$$

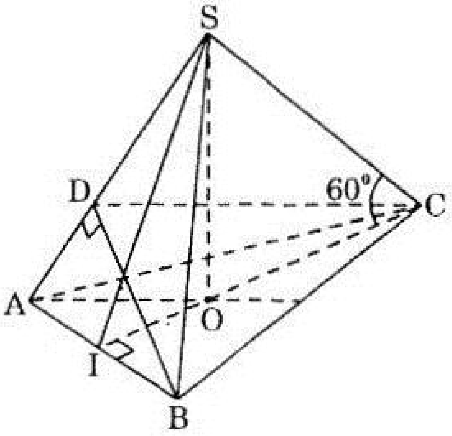
Bài 20. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh AB bằng a. Các cạnh bên SA, SB, SC tạo với đáy một góc 60^0. Gọi D là giao điểm của SA với mặt phẳng qua BC và vuông góc với SA.

1. Tính tỉ số thể tích hai khối S.DBC và S.ABC.
2. Tính thể tích khối chóp S.DBC.

Giải

1. Gọi O là tâm của ΔABC ⇒ SO ⊥ (ABC) (vì S.ABC là hình chóp đều)

Vậy OC là hình chiếu của SC trên (ABC) ⇒ góc giữa SC và (ABC) là góc $(\widehat{SC, OC}) = \widehat{SCO} = 60^0$.



Ta có : $CO = \dfrac{2}{3}CI = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

(với CI là đường cao tam giác đều ABC)

Xét ΔSOC vuông tại O, có :

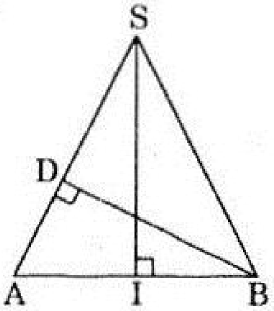
$$\tan 60^0 = \frac{SO}{CO}$$

$$\Rightarrow SO = CO.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$$

Vậy $SO = a$

$$\Rightarrow SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{4a^2}{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Vậy $SC = SA = SB = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$



Nhận xét : $\Delta AIS \sim \Delta ADB \Rightarrow \dfrac{AD}{AI} = \dfrac{AB}{AS}$

$$\Rightarrow AD = \frac{AI.AB}{AS} = \frac{\frac{a}{2}.a}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} = \frac{3a}{4\sqrt{3}} \Rightarrow AD = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Ta có : $\dfrac{SD}{SA} = \dfrac{SA - AD}{SA} = 1 - \dfrac{AD}{SA} = 1 - \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} = 1 - \dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{8}$

Xét : $\frac{V_{S.DBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB}{SB}.\frac{SC}{SC}.\frac{SD}{SA} = \frac{5}{8}$ (*)

2. Ta có : $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SO.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

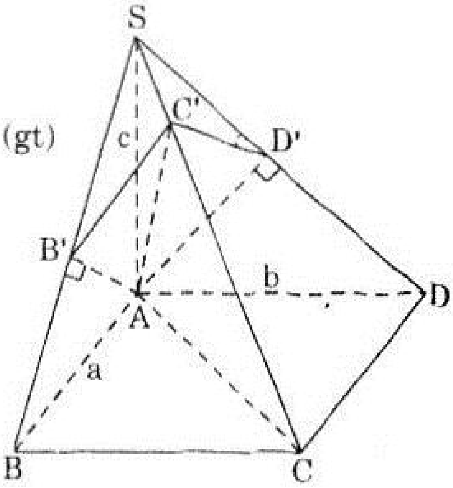
Từ (*) cho ta : $V_{S.DBC} = \frac{5}{8}V_{S.ABC} = \frac{5}{8}.\frac{a^3\sqrt{3}}{12} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{96}$.

Bài 21. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy, AB = a, AD = b, SA = c. Lấy điểm B', D' theo thứ tự thuộc SB, SD sao cho AB' vuông góc với SB, AD' vuông góc với SD. Mặt phẳng (AB'D') cắt SC tại C'. Tính thể tích khối chóp S.AB'C'D'.

Giải

Ta có : $\left.\begin{array}{l} BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \\ BC \perp AB \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow BC \perp (SAB) \\ AB' \subset (SAB) \end{array}\right\} \Rightarrow AB' \perp BC$, mà $AB' \perp SB$ (gt)



$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \Rightarrow AB' \perp (SBC) \\ \text{mà } SC \subset (SBC) \end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp AB' \\ \text{Chứng minh tương tự : } SC \perp AD' \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow SC \perp (AB'D') \\ \text{mà } AC' \subset (AB'D') \end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp AC'$.

Xét ΔSAB vuông tại A, có AB' là đường cao nên có :

$$SA^2 = SB'.SB \Rightarrow \frac{SB'.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2}$$

$$\Rightarrow \frac{SB'}{SB} = \frac{c^2}{c^2 + a^2}$$

Xét các tam giác SAD có đường cao AD', SAC có đường cao AC'.

Tượng tự, ta có : $\frac{SD'}{SD} = \frac{c^2}{c^2 + b^2}$

và $\frac{SC'}{SC} = \frac{c^2}{c^2 + a^2 + b^2}$ (do $SC^2 = SA^2 + AC^2 = c^2 + a^2 + b^2$)

Ta lại có : $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}abc$

Nhận xét : $V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}$

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{c^2}{c^2+a^2}.\frac{c^2}{c^2+a^2+b^2} \qquad (a)$$

$$\frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SC'}{SC}.\frac{SD'}{SD} = \frac{c^2}{c^2+b^2}.\frac{c^2}{c^2+a^2+b^2} \qquad (b)$$

Cộng vế với vế (a) và (b) ta được :

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{S_{S.ABC}} + \frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{V_{S.AB'C'} + V_{S.AC'D'}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}} = \frac{c^4}{c^2+a^2+b^2}\left(\frac{1}{c^2+a^2} + \frac{1}{c^2+b^2}\right)$$

$$\Rightarrow V_{S.AB'C'D'} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}.\frac{c^4}{c^2+a^2+b^2}\left(\frac{1}{c^2+a^2} + \frac{1}{c^2+b^2}\right)$$

$$= \frac{1}{6}abc.\frac{c^4}{c^2+a^2+b^2}\left(\frac{1}{c^2+a^2} + \frac{1}{c^2+b^2}\right)$$

$$= \frac{abc^5(a^2+b^2+2c^2)}{6(a^2+b^2+c^2)(c^2+a^2)(c^2+b^2)}.$$

TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 22. Cho khối chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD, M là trung điểm SC. Một mặt phẳng (P) qua AM và song song với BD chia khối chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Đáp số : $\frac{1}{2}$.

Bài 23. Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành và có SA ⊥ (ABCD). Mặt phẳng (P) qua AB cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại M, N và (P) chia khối chóp S.ABCD thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính tỉ số $\frac{SM}{SC}$.

Đáp số : $\frac{SM}{SC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN KHÁC

Bài 1. Cho hai đường thẳng chéo nhau d và d'. Đoạn thẳng AB có độ dài a trượt trên d, đoạn thẳng CD có độ dài b trượt trên d'. Chứng minh rằng khối tứ diện ABCD có thể tích không đổi.

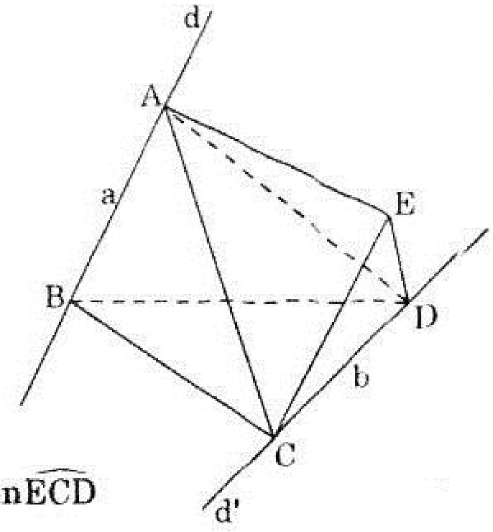
Giải

- Gọi h là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d và d', gọi α là góc giữa hai đường thẳng d và d'.

- Dựng hình bình hành ABCE.

$$\text{Vậy } \left.\begin{array}{l} AE \parallel BC \\ BC \subset (BCD) \end{array}\right\} \Rightarrow AE \parallel (BCD) \Rightarrow d\,(A,(BCD)) = d\,(E,(BCD))$$

$$\text{Mà } \left.\begin{array}{l} V_{A.BCD} = \frac{1}{3}d\,(A,(BCD)).S_{\Delta BCD} \\ V_{E.BCD} = \frac{1}{3}d\,(E,(BCD)).S_{\Delta BCD} \end{array}\right\}$$



$\Rightarrow\ V_{A.BCD} = V_{E.BCD}$ (a)

Tính $V_{E.BCD} = V_{B.ECD}$.

$$\text{Ta có : } V_{B.ECD} = \frac{1}{3}d\,(B,(CDE)).S_{\Delta ECD}$$

$$= \frac{1}{3}d\,(B,(CDE)).\frac{1}{2}CE.CD.\sin\widehat{ECD}$$

$$= \frac{1}{3}d\,(B,(CDE)).\frac{1}{2}CE.CD.\sin\alpha$$

$$\left(\left.\begin{array}{l} \text{vì } CE \parallel d \\ \quad CD \equiv d' \end{array}\right\} \Rightarrow (\widehat{d,d'}) = (\widehat{CD,CE}) = \alpha\right)$$

$$= \frac{1}{6}AB.CD.\sin\alpha.\,d\,(B,(CDE)) \qquad (b)$$

$$\text{Mặt khác : } \left.\begin{array}{l} AB \parallel CE \quad \text{(do ABCD là hình bình hành)} \\ CE \subset (CDE) \end{array}\right\} \Rightarrow AB \parallel (CDE)$$

$\Rightarrow d\,(B,(CDE)) = d\,(AB,(CDE)) = d\,(AB, CD) = h$ (c)

Từ (b) và (c) suy ra : $V_{E.BCD} = V_{B.ECD} = \frac{1}{6}a.b.h.\sin\alpha$, thay vào (a) ta có :

$$V_{A.BCD} = \frac{1}{6}abh\sin\alpha \text{ : hằng số}$$

Vậy thể tích khối tứ diện ABCD không đổi.

Bài 2. Cho hình chóp tam giác S.ABC có AB = 5a, BC = 6a, CA = 7a. Các mặt bên SAB, SBC, SCA tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp.

Giải

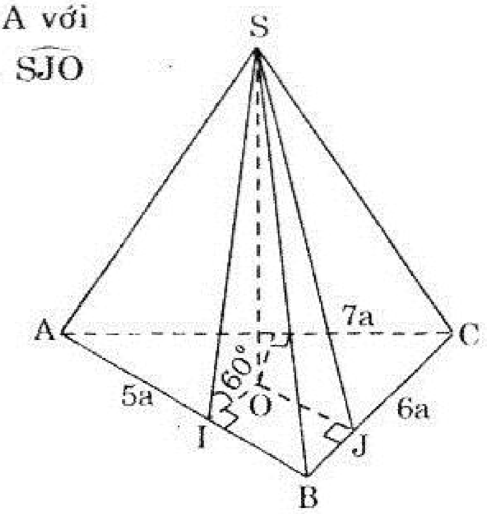
Từ S kẻ SO ⊥ (ABC) tại O.

Từ O vẽ OI ⊥ AB tại I ⇒ SI ⊥ AB

vẽ OJ ⊥ BC tại J ⇒ SJ ⊥ BC

và vẽ OK ⊥ AC tại K ⇒ SK ⊥ CA (do định lí ba đường vuông góc)

⇒ góc giữa các mặt bên SAB, SBC và SCA với mặt đáy ABC lần lượt là các góc : $\widehat{SIO}$, $\widehat{SJO}$ và $\widehat{SKO}$. Theo giả thiết :



$$\widehat{SIO} = \widehat{SJO} = \widehat{SKO} = 60^0$$

$$\Rightarrow \Delta SOI = \Delta SOJ = \Delta SOK$$

$$\Rightarrow OI = OJ = OK$$

⇒ O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Ta có : $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC}$

$$= \frac{25a^2 + 49a^2 - 36a^2}{2.5a.7a} = \frac{38a^2}{70a^2} = \frac{19}{35}$$

$$\Rightarrow \sin\widehat{BAC} = \sqrt{1 - \cos^2\widehat{BAC}} = \sqrt{1 - \left(\frac{19}{35}\right)^2} = \frac{12\sqrt{6}}{35}$$

Vậy : $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}.5a.7a.\dfrac{12\sqrt{6}}{35} = 6\sqrt{6}a^2$

Ta lại có : $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}(AB + AC + BC).r$ (với r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC)

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{6}a^2 = \frac{1}{2}(5a + 7a + 6a).r \Leftrightarrow 12\sqrt{6}a^2 = 18a.r \Leftrightarrow r = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$$

$$\Rightarrow OI = r = \frac{2\sqrt{6}}{3}a.$$

Xét ΔSOI vuông tại O, ta có :

$$\tan 60^0 = \frac{SO}{OI} \Rightarrow SO = OI.\tan 60^0 = \frac{2\sqrt{6}}{3}a.\sqrt{3} = 2\sqrt{2}a$$

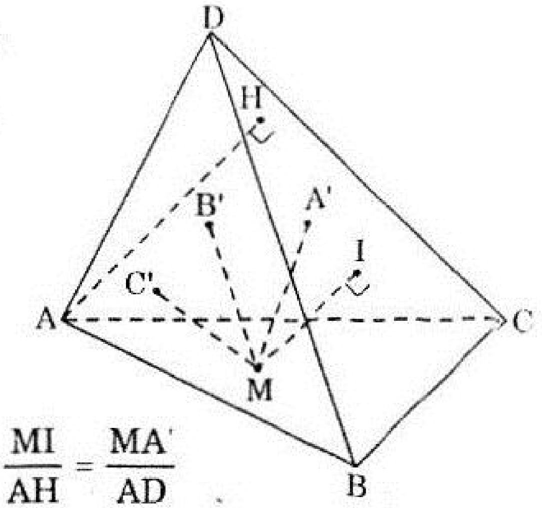
Vậy : $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SO.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.2\sqrt{2}a.6\sqrt{6}a^2 = 8\sqrt{3}a^3$.

Bài 3. Trên đáy ABC của tứ diện DABC ta lấy một điểm M. Các đường thẳng qua M song song với các cạnh DA, DB, DC cắt các mặt DBC, DCA, DAB lần lượt tại A', B', C'. Chứng minh rằng :

$$\frac{MA'}{DA} + \frac{MB'}{DB} + \frac{MC'}{DC} = 1.$$

Giải

Ta có : $V_{D.ABC} = V_{M.DAB} + V_{M.DAC} + V_{M.DBC}$ (1)



Chia hai vế của (1) cho $V_{D.ABC}$, ta được :

$$1=\frac{V_{M.DAB}}{V_{D.ABC}}+\frac{V_{M.DAC}}{V_{D.ABC}}+\frac{V_{M.DBC}}{V_{D.ABC}}\quad(*)$$

Xét $\frac{V_{M.DBC}}{V_{D.ABC}}$.

Từ M dựng MI ⊥ (DBC) tại I và từ A dựng AH ⊥ (DBC) tại H

$$\Rightarrow AH\ //\ MI\ \Rightarrow\ \Delta AHD \backsim \Delta MIA'\ \Rightarrow \frac{MI}{AH}=\frac{MA'}{AD}.$$

Vậy : $$\frac{V_{M.DBC}}{V_{D.ABC}}=\frac{\frac{1}{3}MI.S_{\Delta DBC}}{\frac{1}{3}AH.S_{\Delta DBC}}=\frac{MI}{AH}=\frac{MA'}{AD}\quad(1)$$

Chứng minh tương tự, ta có : $$\frac{V_{M.DAB}}{V_{D.ABC}}=\frac{MC'}{CD}\quad(2)$$

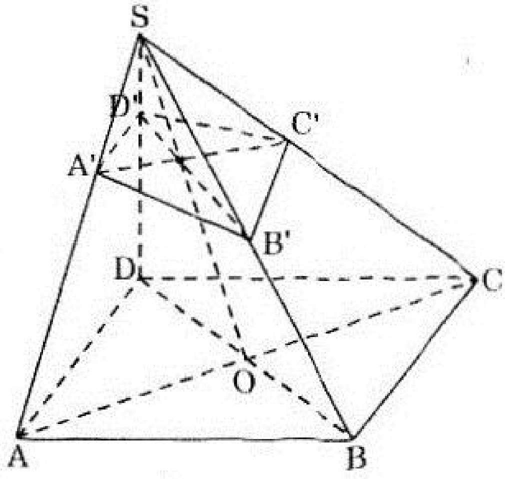
$$\frac{V_{M.DCA}}{V_{D.ABC}}=\frac{MB'}{DB}\quad(3)$$

Thay (1), (2) và (3) vào (*), ta được : $1=\frac{MC'}{CD}+\frac{MB'}{DB}+\frac{MA'}{AD}$.

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Một mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SD theo thứ tự tại A', B', C' và D'. Chứng minh rằng :

1. $V_{S.ABC}=V_{S.ACD}=V_{S.ABD}=V_{S.BCD}$.
2. $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$.

Giải



1. Gọi V là thể tích hình chóp S.ABCD.

Ta có :

$$S_{\Delta ABD}=S_{\Delta CBD}=S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$

Vì các hình chóp S.ABD, S.CBD, S.ABC, S.ACD, S.ABCD có cùng chiều cao

$$\Rightarrow V_{S.ABD}=V_{S.ACD}=V_{S.ABD}=V_{S.BCD}=\frac{V}{2}.$$

2. Ta có : $$\frac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABD}}=\frac{V_{S.A'B'D'}}{\frac{V}{2}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD}\quad(a)$$

$$\frac{V_{S.C'B'D'}}{V_{S.CBD}} = \frac{V_{S.C'B'D'}}{\frac{V}{2}} = \frac{SC'}{SC}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD} \qquad (b)$$

Cộng vế với vế (a) và (b) ta được :

$$\frac{V_{S.A'B'D'} + V_{S.C'B'D'}}{\frac{V}{2}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD}\left(\frac{SA'}{SA} + \frac{SC'}{SC}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2V_{A'B'C'D'}}{V} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD}\left(\frac{SA'}{SA} + \frac{SC'}{SC}\right) \qquad (*)$$

Chứng minh tương tự, ta có :

$$\frac{2V_{A'B'C'D'}}{V} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}\left(\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD}\right) \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) cho ta được :

$$\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}\left(\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD}\right) = \frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD}\left(\frac{SA'}{SA} + \frac{SC'}{SC}\right) \qquad (***)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}.\frac{SD}{SD'}\right)\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}\left(\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD}\right) =$$

$$= \left(\frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}.\frac{SD}{SD'}\right)\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD}\left(\frac{SA'}{SA} + \frac{SC'}{SC}\right)$$

$\left(\text{Nhân hai vế của (***) với } \frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}.\frac{SD}{SD'}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{SB}{SB'}.\frac{SD}{SD'}\left(\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD}\right) = \frac{SA}{SA'}.\frac{SC}{SC'}\left(\frac{SA'}{SA} + \frac{SC'}{SC}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{SD}{SD'} + \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'} + \frac{SA}{SA'}.$$

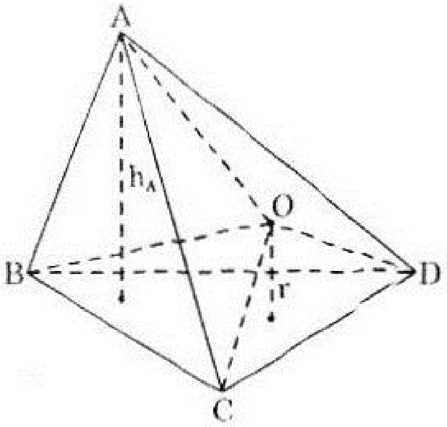
Bài 5. Cho tứ diện đều ABCD có điểm O nằm trong tứ diện và cách đều các mặt của tứ diện một khoảng r. Gọi h_A, h_B, h_C, h_D lần lượt là khoảng cách từ các điểm A, B, C, D đến các mặt đối diện. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}.$$

Giải

Với điểm O nằm trong tứ diện ABCD, phân chia tứ diện đó thành bốn khối : O.BCD, O.ACD, O.ABC và O.ABD.

Ta có : $\dfrac{V_{O.BCD}}{V_{ABCD}} = \dfrac{\frac{1}{3}r.S_{BCD}}{\frac{1}{3}h_A.S_{BCD}} = \dfrac{r}{h_A}$ (a)



Chứng minh tương tự : $\dfrac{V_{O.ACD}}{V_{ABCD}} = \dfrac{r}{h_B}$ (b)

$\dfrac{V_{O.ABC}}{V_{ABCD}} = \dfrac{r}{h_D}$ (c)

và $\dfrac{V_{O.ABD}}{V_{ABCD}} = \dfrac{r}{h_C}$ (d)

Cộng vế với vế (a), (b), (c) và (d) cho ta :

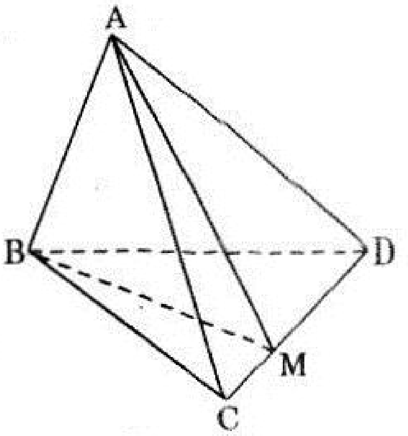
$$\frac{V_{O.BCD} + V_{O.ACD} + V_{O.ABC} + V_{O.ABD}}{V_{ABCD}} = r\left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}\right)$$

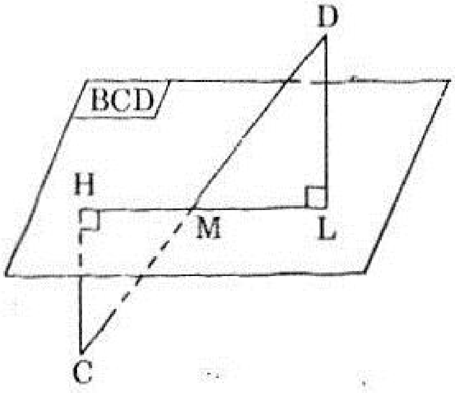
$$\Leftrightarrow 1 = \frac{V_{ABCD}}{V_{ABCD}} = r\left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}.$$

Bài 6. Hãy chia một khối tứ diện thành hai khối tứ diện sao cho tỉ số thể tích của hai khối tứ diện này bằng một số k > 0 cho trước.

Giải





Gọi khối tứ diện là ABCD.

Và M là điểm nằm giữa C và D sao cho $\dfrac{CM}{DM} = k$

Từ C vẽ CH ⊥ (ABM) tại H.

Từ D vẽ DL ⊥ (ABM) tại L.

$\Rightarrow V_{C.ABM} = \dfrac{1}{3}CH.S_{\Delta ABM}$ (1) và $V_{D.ABM} = \dfrac{1}{3}DL.S_{\Delta ABM}$ (2)

Ta có : $\Delta MHC \backsim \Delta MLD \Rightarrow \frac{CH}{DL} = \frac{CM}{DM} = k \Rightarrow CH = k.DL$ (3)

Thay (3) vào (1) cho ta được : $V_{C.ABM} = \frac{1}{3}k.DL.S_{\Delta ABM}$ (4)

Từ (2) và (4) cho ta được :

$$\frac{V_{D.ABM}}{V_{C.ABM}} = \frac{\frac{1}{3}DL.S_{\Delta ABM}}{\frac{1}{3}k.DL.S_{\Delta ABM}} = \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{V_{C.ABM}}{V_{D.ABM}} = k.$$

Vậy ta đã chia khối tứ diện ABCD bởi mp (ABM) thành hai khối tứ diện mà tỉ số thể tích của hai khối tứ diện này bằng k.

Bài 7. Chứng minh rằng nếu có phép vị tự tỉ số k biến tứ diện ABCD thành tứ diện A'B'C'D' thì : $\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = |k|^3$.

Giải

Giả sử phép vị tự F tỉ số k biến hình chóp A.BCD thành hình chóp A'.B'C'D'.

Gọi AH là đường cao của A.BCD và A'H' là đường cao của A'.B'C'D'.

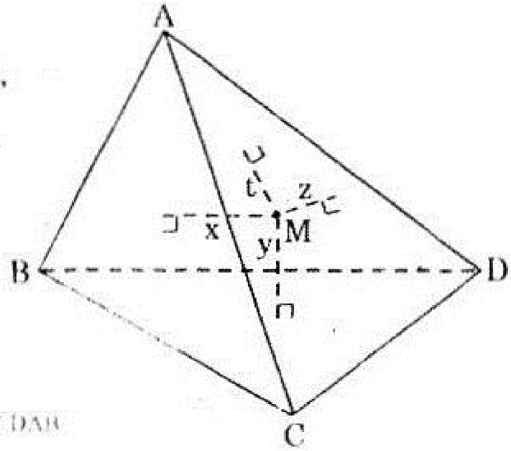
Nên F biến AH thành A'H' $\Rightarrow A'H' = |k|AH$

F biến ΔBCD thành ΔB'C'D' $\Rightarrow S_{\Delta B'C'D'} = k^2.S_{\Delta BCD}$.

Xét : $$\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3}A'H'.S_{\Delta B'C'D'}}{\frac{1}{3}AH.S_{\Delta BCD}} = \frac{|k|.AH.k^2.S_{\Delta BCD}}{AH.S_{\Delta BCD}} = |k|.k^2 = |k|^3.$$

Bài 8. Cho điểm M nằm bên trong hình tứ diện đều ABCD. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ M tới bốn mặt của hình tứ diện là một số không phụ thuộc vào vị trí của điểm M. Tổng đó bằng bao nhiêu nếu cạnh của tứ diện đều bằng a.

Giải



- Gọi d (M, (ABC)) = x, d (M, (BCD)) = y,

d (M, (CDA)) = z, d (M, (DAB)) = t

và gọi h là chiều cao của hình tứ diện đều, S là diện tích các mặt của hình tứ diện.

Ta có :

$V_{ABCD} = V_{M.ABC} + V_{M.BCD} + V_{M.CDA} + V_{M.DAB}$

$\Rightarrow \frac{1}{3}h.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}x.S_{\Delta ABC} + \frac{1}{3}y.S_{\Delta BCD} + \frac{1}{3}z.S_{\Delta CDA} + \frac{1}{3}t.S_{\Delta DAB}$

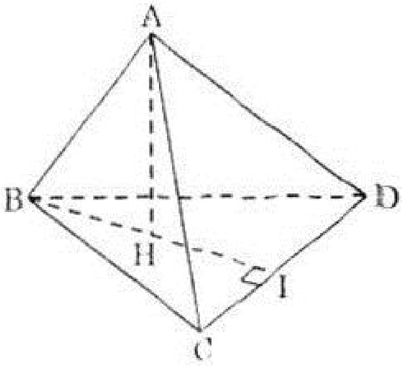
$\Rightarrow h.S = x.S + y.S + z.S + t.S$

$\Rightarrow h = x + y + z + t$

⇒ tổng các khoảng cách từ M tới bốn mặt của hình tứ diện đều không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

- Vẽ $AH \perp (BCD)$ tại H $\Rightarrow AH = h$.

Ta có BH, CH và DH lần lượt là hình chiếu của AB, AC và AD trên (BCD).



Mà AB = AC = AD

$\Rightarrow BH = CH = DH$

⇒ H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

Mà ΔBCD là tam giác đều

⇒ H là trọng tâm ΔBCD

$\Rightarrow BH = \frac{2}{3}BI$ (với I là trung điểm CD)

$= \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (do cạnh ΔBCD bằng a)

Xét ΔABH vuông tại H, ta có :

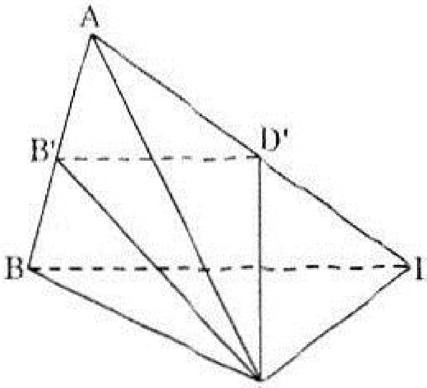
$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$\Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Vậy nếu tứ diện ABCD có cạnh là a thì : $x + y + z + t = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Bài 9. Cho tứ diện ABCD có thể tích bằng V. Gọi B' và D' lần lượt là trung điểm của AB và AD. Mặt phẳng (CB'D') chia khối tứ diện thành hai phần. Tính thể tích mỗi phần đó.

Giải



Ta có : $\frac{V_{A.B'CD'}}{V_{A.BCD}} = \frac{AB'.AC.AD'}{AB.AC.AD}$

$= \frac{AB'}{AB}.\frac{AD'}{AD} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

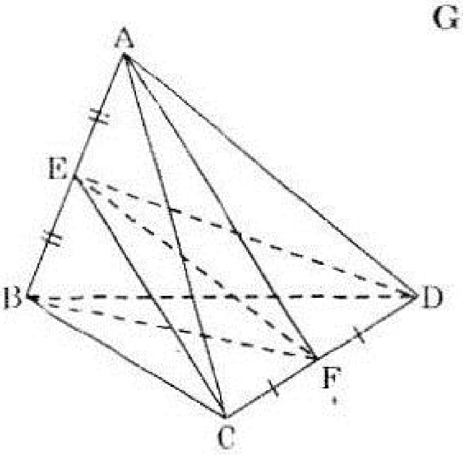
$\Rightarrow V_{A.B'CD'} = \frac{1}{4}V_{A.BCD} = \frac{1}{4}V$

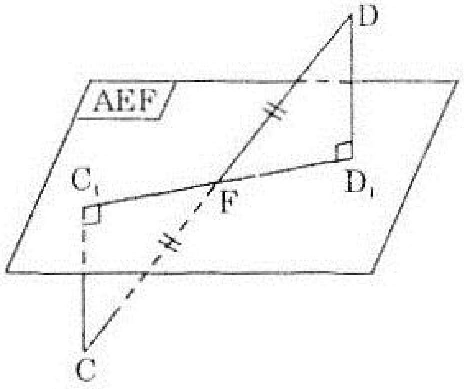
Ta lại có : $V_{CBBDD} = V_{A.BCD} - V_{A.BCD} = V - \frac{1}{4}V = \frac{3}{4}V$.

Bài 10. Cho khối tứ diện ABCD, E và F lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Hai mặt phẳng (ABF) và (CDE) chia khối tứ diện ABCD thành bốn khối tứ diện.

1. Kể tên bốn khối tứ diện đó.
2. Chứng tỏ rằng bốn khối tứ diện đó có thể tích bằng nhau.
3. Chứng tỏ rằng nếu ABCD là khối tứ diện đều thì bốn khối tứ diện trên bằng nhau.

Giải





1. Hai mặt phẳng (ABF) và (CDE) chia khối tứ diện ABCD thành bốn khối tứ diện : ADEF, ACEF, BDEF, BCEF.

2. Ta chứng minh : $V_{C.AEF} = V_{D.AEF}$.

Từ C vẽ $CC_1 \perp (AEF)$ tại C_1. Từ D vẽ $DD_1 \perp (AEF)$ tại D_1.

$\Rightarrow C_1, F, D_1$ thẳng hàng $\Rightarrow \Delta C_1CF = \Delta D_1DF \Rightarrow CC_1 = DD_1$.

Ta có : $$\left.\begin{aligned} V_{C.AEF} &= \frac{1}{3}CC_1.S_{\Delta AEF} \\ V_{D.AEF} &= \frac{1}{3}DD_1.S_{\Delta AEF} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_{C.AEF} = V_{D.AEF} \quad \text{(a)}$$

Chứng minh tương tự : $V_{A.DEF} = V_{B.DEF}$ (b)

$V_{D.BEF} = V_{C.BEF}$ (c)

$V_{B.CEF} = V_{A.CEF}$ (d)

Từ (a), (b), (c) và (d) suy ra bốn khối tứ diện A.DEF, A.CEF, B.DEF và B.CEF có thể tích bằng nhau.

3. Khối tứ diện ABCD là khối tứ diện đều.

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta ACD \text{ đều } \Rightarrow AF \perp CD \\ \Delta BCD \text{ đều } \Rightarrow BF \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABF) \text{ tại } F$$

$\Rightarrow$ mp (ABF) là mặt phẳng trung trực của CD.

Phép đối xứng qua (ABF) biến : C thành D, F thành F, E thành E, A thành A.

⇒ Phép đối xứng qua (ABF) biến từ khối CAEF thành khối tứ diện DAEF ⇒ Hai khối tứ diện CAEF, DAEF bằng nhau (a')

Chứng minh tương tự : Phép đối xứng qua (ABF) biến khối tứ diện DBEF thành khối tứ diện CBEF.

⇒ Hai khối tứ diện DBEF và CBEF bằng nhau (b')

Mặt khác phép đối xứng qua trục EF biến : A thành B, D thành C, E thành F, F thành F.

⇒ Hai khối tứ diện ADEF và BCEF bằng nhau (c')

Từ (a'), (b'), (c') cho ta được bốn khối tứ diện ABEF, ACEF, BDEF và BCEF bằng nhau.

CHỦ ĐỀ 22. Thể tích khối lăng trụ

$\boxed{V_{lăng\ trụ} = B.h}$ *Với B là diện tích đáy và h là chiều cao.*

Dạng 1. Khối lăng trụ đứng và khối lăng trụ đều

Định nghĩa	*Tính chất*
• *Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.*	• *Các mặt bên hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật.* • *Các mặt bên hình lăng trụ đứng vuông góc với mặt đáy.* • *Chiều cao là cạnh bên.*
• *Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.*	• *Các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau* • *Chiều cao là cạnh bên.*

Bài 1. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông tại A, AC = a, $\hat{C} = 60^0$. Đường chéo BC' của mặt bên BB'C'C tạo với mặt phẳng (AA'C'C) một góc 30^0.

1. Tính độ dài đoạn AC'.
2. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

Giải

1. Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} BA \perp AC \\ BA \perp AA' \quad (\text{do } AA' \perp (ABC)) \end{array}\right\} \Rightarrow BA \perp (AA'C'C)$$

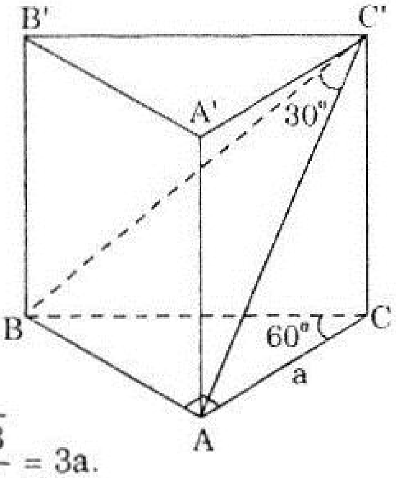
$\Rightarrow$ AC' là hình chiếu của BC' trên (AA'C'C)

$\Rightarrow$ góc giữa AC' và mp (AA'C'C) là $(\widehat{BC', AC'}) = \widehat{BC'A} = 30^0$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Theo chứng minh trên : } BA \perp (AA'C'C)\\ AC' \subset (AA'C'C)\end{array}\right\} \Rightarrow BA \perp AC'$$

$\Rightarrow$ $\Delta ABC'$ vuông tại A, ta có :

$$\tan 30^0 = \frac{AB}{AC'} \Rightarrow AC' = \frac{AB}{\tan 30^0} \quad (1)$$



Xét ΔABC vuông tại A, có :

$$\tan 60^0 = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow AB = AC.\tan 60^0 = a\sqrt{3} \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được : $AC' = \dfrac{a\sqrt{3}}{\tan 30^0} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = 3a.$

2. Xét $\Delta AC'C$ vuông tại C, ta có :

$$CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = \sqrt{8a^2} = 2a\sqrt{2}$$

Ta có : $V_{ABC.A'B'C'} = CC'.S_{ABC} = \dfrac{1}{2}CC'.AB.AC = \dfrac{1}{2}.2a\sqrt{2}.a\sqrt{3}.a = a^3\sqrt{6}.$

Bài 2. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C'. Mặt (A'BC) tạo với đáy một góc 30^0 và $\Delta A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

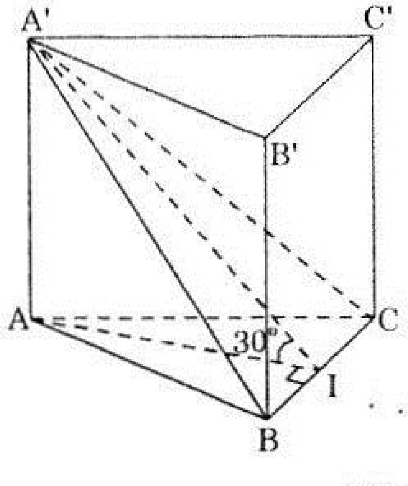
Giải

$$\left.\begin{array}{l}\text{Gọi I là trung điểm của BC} \Rightarrow AI \perp BC \text{ (do } \Delta ABC \text{ là tam giác đều)}\\ \text{Và có AI là hình chiếu của A'I trên (ABC)}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ $A'I \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc)

Vậy góc của (A'BC) và (ABC) là $(\widehat{A'I, AI}) = \widehat{A'IA} = 30^0$

Gọi a là cạnh đáy $\Rightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



Xét $\Delta AA'I$ vuông tại A, ta có :

$$\cos 30^0 = \frac{AI}{A'I} \Rightarrow A'I = \frac{AI}{\cos 30^0} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = a$$

Ta có : $S_{\Delta A'BC} = 8$ (giả thiết)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}A'I.BC = 8 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad a = 4$$

Vậy : $AI = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

Xét $\Delta AA'I$, ta có : $\tan 30^0 = \dfrac{AA'}{AI} \Rightarrow AA' = AI.\tan 30^0 = 2\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 2$

Vậy : $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AA'.AI.BC = \dfrac{1}{2}.2.2\sqrt{3}.4 = 8\sqrt{3}.$

Bài 3. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và A_1D bằng 2a và độ dài đường chéo của mặt bên bằng 5a.

1. Vẽ AK vuông góc A_1D tại K. Tính độ dài đoạn AK.
2. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

Giải

1. Ta có :
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AB \,//\, A_1B_1 \\ A_1B_1 \subset (A_1B_1D) \end{array}\right\} \Rightarrow AB \,//\, (A_1B_1D) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad A_1D \subset (A_1B_1D) \end{array}\right\}$$

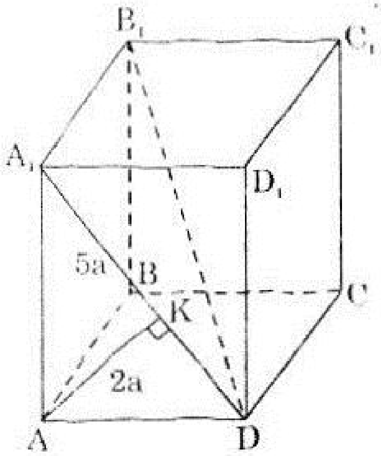
$\Rightarrow d\,(AB, A_1D) = d\,(AB, (A_1B_1D)) = d\,(A, (A_1B_1D))$ (1)

Ta có :
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A_1B_1 \perp (AA_1D_1D) \\ AK \subset (AA_1D_1D) \end{array}\right\} \Rightarrow AK \perp A_1B_1 \\ \qquad\qquad\qquad \text{Mà có } AK \perp A_1D \text{ (gt)} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow AK \perp (A_1B_1D) \Rightarrow AK = d\,(A, (A_1B_1D))$

Mà $d\,(A, (A_1B_1D)) = d\,(AB, A_1D) = 2a$ (do (1))

Vậy AK = 2a.



2. Theo giả thiết $A_1D = 5a$.

Xét ΔAA_1D vuông tại A có đường cao là AK, nên có : $AK^2 = A_1K.DK$

$$\Leftrightarrow 4a^2 = (A_1D - DK).DK$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 = (5a - DK).DK \Leftrightarrow DK^2 - 5a.DK + 4a^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} DK = 4a \\ DK = a \end{array}\right.$$

* Với DK = 4a

Xét ΔAKD vuông tại K, ta có :

$$AD = \sqrt{AK^2 + KD^2} = \sqrt{4a^2 + 16a^2} = a\sqrt{20} = 2a\sqrt{5}$$

Xét ΔAA_1D vuông tại A, ta có :

$$AA_1 = \sqrt{A_1D^2 - AD^2} = \sqrt{25a^2 - 20a^2} = \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}$$

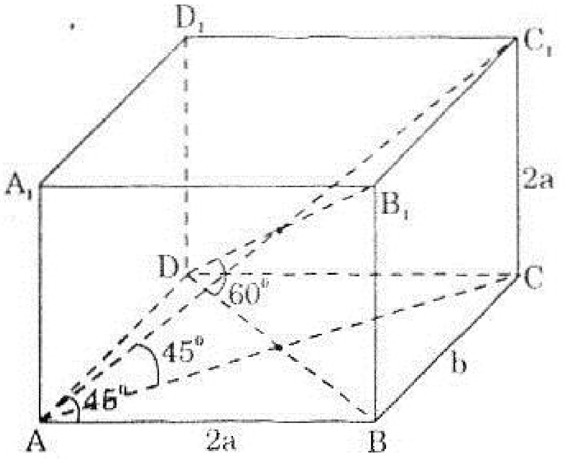
Vậy : $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = AA_1.S_{ABCD} = a\sqrt{5}.(2a\sqrt{5})^2 = 20\sqrt{5}a^3$

* Với DK = a, tương tự ta tìm được : $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = 10\sqrt{5}a^3$.

Bài 4. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy là hình bình hành và $\widehat{BAD} = 45^0$. Các đường chéo AC_1 và DB_1 lần lượt tạo với đáy các góc 45^0 và 60^0 và $CC_1 = 2a$.

Hãy tính thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

Giải



Ta có : AC là hình chiếu AC_1 trên (ABCD)

$\Rightarrow$ góc giữa AC_1 và (ABCD) là $(\widehat{AC_1, AC}) = \widehat{C_1AC} = 45^0$

và BD là hình chiếu của DB_1 trên (ABCD)

$\Rightarrow$ góc giữa DB_1 và (ABCD) là $(\widehat{DB_1, DB}) = \widehat{B_1DB} = 60^0$

Nhận xét ΔACC_1 vuông cân tại C $\Rightarrow AC = CC_1 = 2a$.

Xét ΔDBB_1 vuông tại B, ta có :

$$\tan 60^0 = \frac{BB_1}{DB} \Rightarrow DB = \frac{BB_1}{\tan 60^0} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Xét ΔABD và ΔADC, ta có : $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos 45^0$ (1)

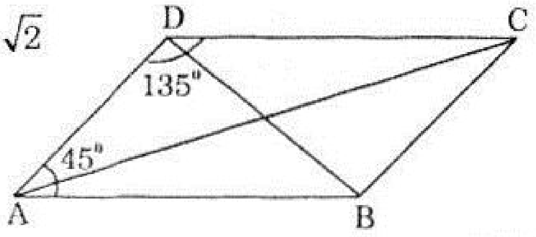
$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD.DC.\cos 135^0$ (2)

Trừ vế với vế của (1) và (2) ta được :

$BD^2 - AC^2 = -2AB.AD.\cos 45^0 - 2AD.DC.\cos 45^0$

$\Rightarrow BD^2 - AC^2 = -AB.AD.\sqrt{2} - AD.DC.\sqrt{2}$

$\Rightarrow \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 - (2a)^2 = -2AB.AD.\sqrt{2}$



$$\Rightarrow -\frac{8a^2}{3} = -2AB.AD.\sqrt{2} \quad \Rightarrow AB.AD = \frac{4a^2}{3\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 2.S_{ABD} = 2.\frac{1}{2}.AD.AB.\sin 45^0 = \frac{4a^2}{3\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4a^2}{6} = \frac{2a^2}{3}$$

Vậy : $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = CC_1.S_{ABCD} = 2a.\frac{2a^2}{3} = \frac{4a^3}{3}$.

TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B. Cho biết BB' = AB = a và góc của B'C hợp với đáy bằng φ.

1. Chứng minh rằng : $\widehat{BCA} = \widehat{B'CB}$.
2. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

Đáp số : $V = \frac{1}{2}a^3\cot\varphi$.

Bài 6. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng a. Góc giữa B'C và mặt A'B'C' bằng 60^0.

1. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'.
2. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng B'C.

Đáp số : 1. $V = \frac{3a^3}{4}$; 2. $\frac{a\sqrt{15}}{4}$.

Dạng 2. Khối lăng trụ có cạnh bên không vuông góc với mặt đáy

Bài 7. Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, điểm A' cách đều ba điểm A, B, C; cạnh bên AA' tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0.

1. Tính thể tích khối lăng trụ đó.
2. Chứng minh rằng mặt bên BCC'B' là hình chữ nhật.
3. Tính tổng diện tích các mặt bên của hình lăng trụ ABC.A'B'C'.

Giải

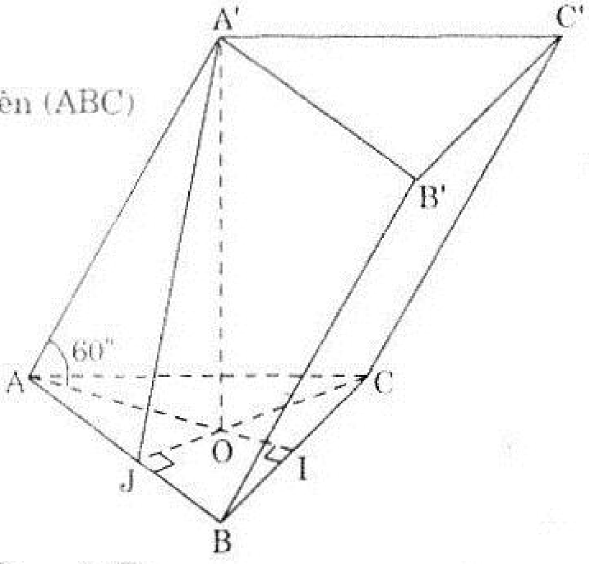
1. Vẽ A'O ⊥ mp (ABC)

Vì A'A = A'B = A'C, mà OA, OB, OC lần lượt là hình chiếu của A'A, A'B và A'C trên (ABC)

$\Rightarrow OA = OB = OC \quad \Rightarrow$ O là tâm của ΔABC

$\Rightarrow AO = \frac{2}{3}AI$ (với I là trung điểm của BC)

$$\Rightarrow AO = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



Mặt khác AO là hình chiếu của AA' trên (ABC)

$\Rightarrow$ góc của AA' và (ABC) là

$$(\widehat{AA', AO}) = \widehat{A'AO} = 60^0$$

Xét $\Delta AA'O$ vuông tại O, ta có :

$$\tan 60^0 = \frac{A'O}{AO}$$

$$\Rightarrow A'O = AO.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$$

Vậy : $V_{ABC.A'B'C'} = A'O.S_{\Delta ABC} = a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

2. Ta có : $\left.\begin{array}{ll} BC \perp AI & (AI \text{ là đường cao } \Delta ABC) \\ BC \perp A'O & (\text{do } A'O \perp (ABC)) \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow BC \perp (A'AO) \\ \text{mà } AA' \subset (A'AO) \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp AA' \text{ mà } AA' \,//\, BB''$$

$\Rightarrow BC \perp BB'$ $\Rightarrow$ BB'C'C là hình chữ nhật.

3. Gọi J là trung điểm của AB.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow CJ \perp AB \quad \Rightarrow OJ \perp AB \\ \text{mà OJ là hình chiếu của A'J trên (ABC)} \end{array}\right\} \Rightarrow A'J \perp AB$$

Ta có : $OJ = \frac{1}{3}CJ = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Xét $\Delta A'JO$ vuông tại O, ta có :

$$A'J = \sqrt{A'O^2 + OJ} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{36}} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{12}} = \sqrt{\frac{13a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$$

Ta lại có : $S_{A'ABB} = A'J.AB = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}.a = \frac{a^2\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$

Chứng minh tương tự, ta có : $S_{A'ACC} = \frac{a^2\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$

Và xét $\Delta A'AO$, ta có : $\sin 60^0 = \frac{A'O}{AA'} \Rightarrow AA' = \frac{A'O}{\sin 60^0} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

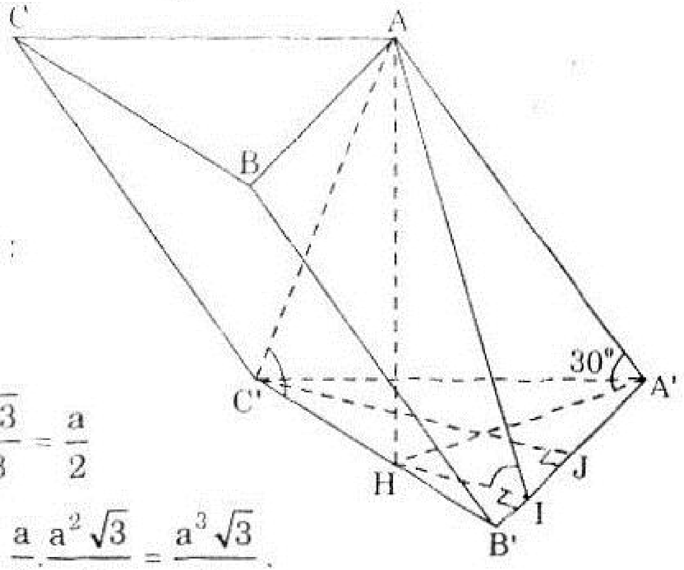
Vậy : $S_{BB'C'C} = BB'.BC = AA'.BC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.a = \frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow S_{A'ABB'} + S_{A'ACC'} + S_{BB'C'C} = \frac{a^2\sqrt{13}}{\sqrt{3}} + \frac{2a^2\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}\left[\sqrt{13}+2\right].$$

Bài 8. Cho khối lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, góc của cạnh bên và mặt đáy bằng 30^0. Hình chiếu H của A trên mp (A'B'C') là trung điểm của B'C'.

1. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'.
2. Tính góc của BC và AC'.
3. Tính góc của mp (ABB'A') và mặt đáy.

Giải



1. Ta có : HA' là hình chiếu của AA' trên (A'B'C')

$\Rightarrow$ góc của AA' và (A'B'C') là

$(\widehat{AA', A'H}) = \widehat{AA'H} = 30^0$

Xét ΔAHA' vuông tại H, ta có :

$$\tan 30^0 = \frac{AH}{A'H}$$

$$\Rightarrow AH = A'H.\tan 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{2}$$

Vậy : $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{A'B'C'} = \frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

2. Ta có : BC // B'C'

$\Rightarrow (\widehat{BC, AC'}) = (\widehat{B'C', AC'}) = \widehat{AC'H}$

Xét ΔAHC' vuông tại H, có : $AH = C'H = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow \Delta$AHC' vuông cân tại H.

$\Rightarrow \widehat{AC'H} = 45^0 \Rightarrow (\widehat{BC, AC'}) = 45^0$.

3. Gọi J là trung điểm của A'B' và I là trung điểm của B'J $\Rightarrow C'J \perp A'B'$ và HI là đường trung bình của ΔC'B'J $\Rightarrow HI \perp A'B'$

và $IH = \frac{C'J}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Ta lại có HI là hình chiếu của AI trên (A'B'C') và có $HI \perp A'B'$

$\Rightarrow AI \perp A'B'$ (định lí ba đường vuông góc)

$\Rightarrow$ góc giữa mặt bên ABB'A' và mặt đáy là $(\widehat{AI, HI}) = \widehat{AIH}$

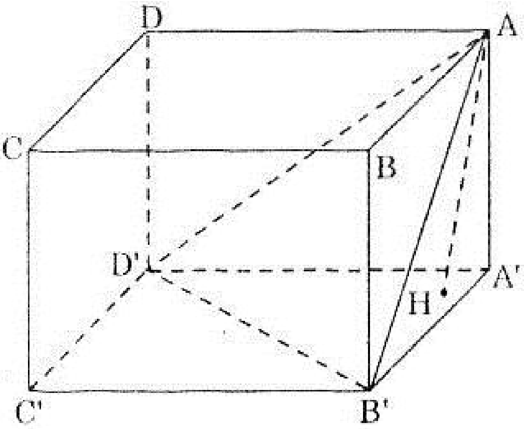
Xét ΔAHI vuông tại H, ta có :

$$\tan\widehat{AIH} = \frac{AH}{HI} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{AIH} = \alpha \quad \text{với } \tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Vậy góc của (ABB'A') và mặt đáy bằng α với $\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Bài 9. Tính thể tích của khối hộp ABCD.A'B'C'D' biết rằng AA'B'D' là khối tứ diện đều cạnh a.

Giải



Từ A vẽ AH ⊥ (A'B'C'D') tại H.

$$\Rightarrow V_{AA'B'D'} = \frac{1}{3}AH.S_{AA'B'D'}$$

$$= \frac{1}{3}AH.\left(\frac{1}{2}S_{A'B'C'D'}\right)$$

$$= \frac{1}{6}AH.S_{A'B'C'D'} \qquad (a)$$

và $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AH.S_{A'B'C'D'}$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra : $V_{AA'B'D'} = \frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'}$

$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = 6.V_{AA'B'D'}$$

Mà ta biết : $V_{AA'B'D'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ (bài 13.1, chủ đề 21, trang 142)

$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = 6.\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 10. Cho khối lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, BC = 2a. Đỉnh A' cách đều A, B, C. Góc của cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0.

1. Tính thể tích khối lăng trụ.
2. Tính tổng diện tích các mặt bên của khối lăng trụ.

Đáp số : 1. $V = a^3\sqrt{3}$

2. $S = 2a^2(\sqrt{7} + 2)$.

Dạng 3. Các bài toán liên quan đến tỉ số thể tích

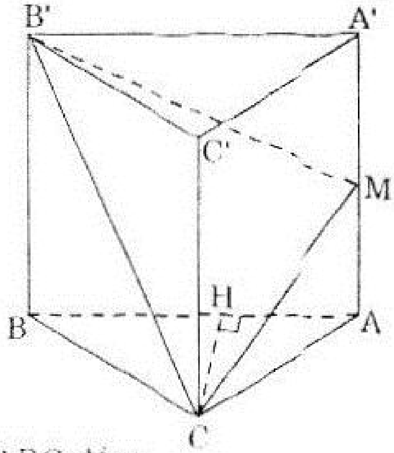
Cho khối lăng trụ (H), một mp (P) cắt (H) theo một thiết diện T và chia (H) thành hai khối (H_1) và (H_2) có thể tích V_1, V_2. Ta tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ như sau : – *Tính $V_{(H)}$*

– *Chọn khối (H_1) (hoặc khối (H_2)) để tính V_1 (hoặc V_2)*

– *Tính $V_2 = V - V_1 \Rightarrow$ tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.*

Bài 11. Cho khối lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C'. Gọi M là trung điểm của AA'. mp (MB'C) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

Giải



Đặt a là cạnh của đáy, b là cạnh bên của khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

Và V là thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'

V_1 là thể tích khối chóp C.BB'MA

V_2 là thể tích khối đa diện CC'B'A'M.

Ta có : $V = BB'.S_{\Delta ABC} = b.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2b\sqrt{3}}{4}$

Gọi H là trung điểm của AB $\Rightarrow$ CH $\perp$ AB (do ΔABC đều)

mà (ABC) $\perp$ (AA', BB') (tính chất khối lăng trụ đều)

(ABC) $\cap$ (AA', BB') = AB

$\Rightarrow$ CH $\perp$ (AA', BB') $\equiv$ (ABB'M)

Vậy : $V_1 = \dfrac{1}{3}CH.S_{AMB'B}$

Ta có BB'MA là hình thang vuông tại A và B.

$$\Rightarrow S_{BB'MA} = \frac{MA + BB'}{2}.AB = \frac{\frac{b}{2} + b}{2}.a = \frac{3ba}{4}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{3ab}{4} = \frac{a^2b\sqrt{3}}{8}.$$

$$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{a^2b\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2b\sqrt{3}}{8} = \frac{a^2b\sqrt{3}}{8}$$

$$\Rightarrow V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 1.$$

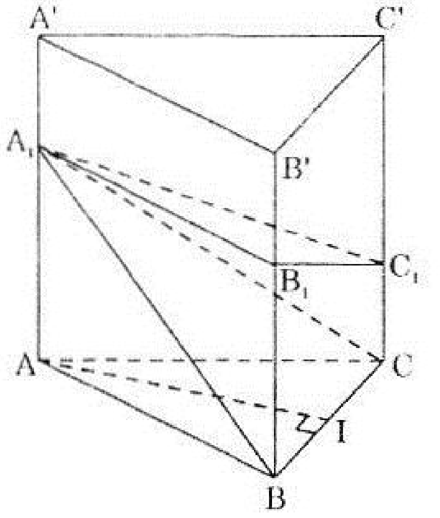
Bài 12. Cho khối lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có diện tích đáy bằng S và AA' = h. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh AA', BB', CC' lần lượt tại A_1, B_1 và C_1. Biết $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.

1. Tính thể tích hai phần của khối lăng trụ được phân chia bởi mp (P).
2. Với điều kiện nào của a, b, c thì thể tích hai phần đó bằng nhau.

Giải

Ta có : $V_{A_1B_1C_1.ABC} = V_{A_1.ABC} + V_{A_1.BB_1C_1C}$ (1)

Mà : $V_{A_1.ABC} = \frac{1}{3}AA_1.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}aS$ (2)



Ta lại có : AA_1 // (BB_1, C_1C)

$\Rightarrow d(A_1, (BB_1, C_1C)) = d(A, (BB_1, C_1C))$

Từ A vẽ AI ⊥ BC tại I

$\Rightarrow AI \perp (BB_1, C_1C)$ (do hình lăng trụ đứng)

$\Rightarrow AI = d(A, (BB_1, C_1C))$

Vậy : $V_{A_1.BB_1C_1C} = \frac{1}{3}AI.S_{BB_1C_1C}$

$= \frac{1}{3}AI.\frac{1}{2}BC.(BB_1 + CC_1)$

$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AI.BC(BB_1 + CC_1) = \frac{1}{3}S(b + c)$ (3)

Thay (2) và (3) vào (1) ta được :

$$V_{A_1B_1C_1.ABC} = \frac{1}{3}aS + \frac{1}{3}S(b + c) = \frac{1}{3}(a + b + c)S$$

Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = S.h$

$$\Rightarrow V_{A_1B_1C_1.A'B'C'} = Sh - \frac{1}{3}S(a + b + c) = \frac{1}{3}[3Sh - (a + b + c)S]$$

$$= \frac{1}{3}S[3h - (a + b + c)] = \frac{1}{3}S[(h - a) + (h - b) + (h - c)]$$

2. Ta có : $V_{A_1B_1C_1.ABC} = V_{A_1B_1C_1.A'B'C'}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(a + b + c)S = \frac{1}{3}S[(h - a) + (h - b) + (h - c)]$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = 3h - (a + b + c)$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{2}{3}(a + b + c).$$

Bài 13. Cho khối lăng trụ đều ABC.A'B'C' và M là trung điểm cạnh AB. Mặt phẳng (B'C'M) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Giải

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ta có: } B'C' \parallel BC,\ BC \subset (ABC) \Rightarrow B'C' \parallel (ABC)\\ \text{Mà } B'C' \subset (B'C'M) \text{ và } M \in (MB'C') \cap (ABC)\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow (MB'C') \cap (ABC) = Mt$ với $Mt \parallel B'C'$

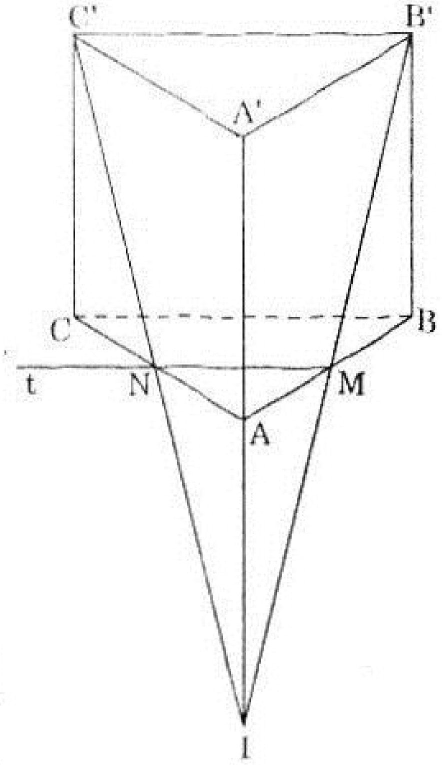
Gọi $Mt \cap AC = N \Rightarrow MN \parallel B'C'$ và $MN \parallel BC$.

Vậy (B'C'M) chia khối lăng trụ thành hai khối đa diện AMN.A'B'C' và MNCBA'B'C'.

Ta có ba đường thẳng A'A, B'M và C'N đồng quy tại I.

Mặt khác : $AI \parallel BB' \Rightarrow \Delta MAI \backsim \Delta MBB'$ mà $\dfrac{MA}{MB} = 1 \Rightarrow \Delta MAI = \Delta MBB'$

$$\Rightarrow \begin{cases} AI = BB' \Rightarrow AI = AA' \Rightarrow \dfrac{IA}{IA'} = \dfrac{1}{2}\\ IM = MB' \Rightarrow \dfrac{IM}{IB'} = \dfrac{1}{2}\end{cases}$$



Chứng minh tương tự : $\dfrac{IN}{IC'} = \dfrac{1}{2}$

Ta có : $\dfrac{V_{IAMN}}{V_{IA'B'C'}} = \dfrac{IA}{IA'}.\dfrac{IM}{IB'}.\dfrac{IN}{IC'} = \dfrac{1}{8}$

$$\Rightarrow V_{I.A'B'C'} = 8V_{I.AMN}$$

Gọi a là cạnh đáy của hình lăng trụ đều ABC.A'B'C' và b là cạnh bên của nó.

$\Rightarrow AM = \dfrac{a}{2}$ và $AI = b$

$$\Rightarrow V_{I.AMN} = \frac{1}{3}AI.S_{\Delta AMN} = \frac{1}{3}b.\frac{a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{a^2b\sqrt{3}}{48}$$

Vậy : $V_{I.A'B'C'} = 8.V_{I.AMN} = 8.\dfrac{a^2b\sqrt{3}}{48} = \dfrac{a^2b\sqrt{3}}{6}$

$$\Rightarrow V_{AMN.A'B'C'} = V_{I.A'B'C'} - V_{I.AMN} = \frac{7a^2b\sqrt{3}}{48}$$

$$\Rightarrow V_{MNBC.A'B'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{AMN.A'B'C'} = \frac{a^2b\sqrt{3}}{4} - \frac{7a^2b\sqrt{3}}{48} = \frac{5a^2b\sqrt{3}}{48}$$

Vậy : $\dfrac{V_{AMN.A'B'C'}}{V_{MNBC.A'B'C'}} = \dfrac{7}{5}$.

Bài 14. Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a.

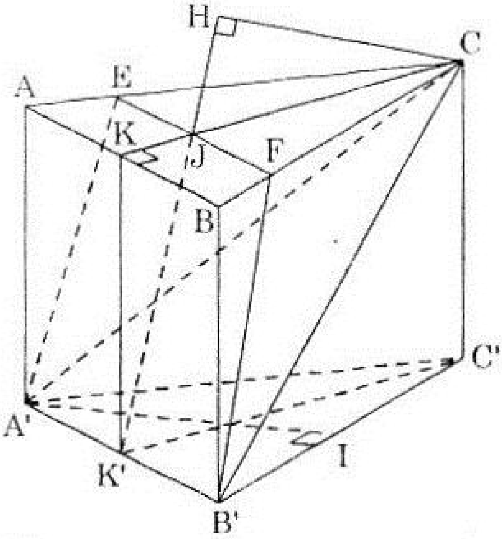
1. Tính thể tích khối tứ diện A'BB'C.
2. Mặt phẳng (P) đi qua A'B' và trọng tâm J của ΔABC, cắt AC và BC lần lượt tại E và F. Tính thể tích khối chóp C.A'B'FE.

Giải

1. Gọi I là trung điểm B'C'

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow A'I \perp B'C' \quad (\text{do } \Delta A'B'C' \text{ là tam giác đều})\\ \text{và có } BB' \perp (A'B'C') \Rightarrow A'I \perp BB'\end{array}\right\} \Rightarrow A'I \perp (BB'C'C) \text{ tại I.}$$

Vậy A'I là đường cao của khối tứ diện A'BB'C vẽ từ A'.



$$\text{Vậy : } V_{A'BB'C} = \frac{1}{3}AI.S_{\Delta BB'C}$$

$$= \frac{1}{3}AI.\left(\frac{1}{2}BB'.BC\right)$$

$$= \frac{1}{6}\frac{a\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

2. Ta có :
$$\left.\begin{array}{l}A'B' \,//\, (ABC)\\ A'B' \subset (P)\\ (P) \cap (ABC) = EF\end{array}\right\} \Rightarrow A'B' \,//\, EF$$

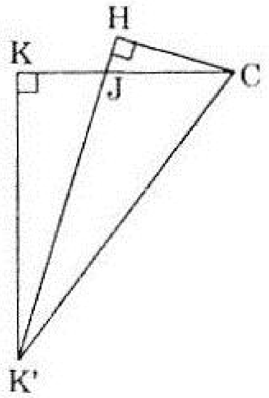
Gọi K' là trung điểm A'B'.

Ta có :
$$\left.\begin{array}{l}A'B' \perp KK'\\ A'B' \perp C'K'\end{array}\right\} \Rightarrow A'B' \perp (KK'C'C) \text{ mà } A'B' \subset (P)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow (P) \perp (KK'C'C)\\ \text{Và } (P) \cap (KK'C'C) = K'J\\ \text{Từ C vẽ } CH \perp K'J \text{ tại H.}\end{array}\right\} \Rightarrow CH \perp (KK'C'C) \text{ tại H.}$$

Ta có : ΔKJK' ∽ ΔHJC

$$\Rightarrow \frac{KK'}{CH} = \frac{JK'}{JC} \Rightarrow CH = \frac{KK'.JC}{JK'}$$



$$\Rightarrow CH = \frac{KK'.JC}{\sqrt{KK'^2 + KJ^2}} = \frac{a.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}} = \frac{2a}{\sqrt{13}}$$

(vì J là trọng tâm tam giác đều ABC ⇒ $\begin{cases} JC = \frac{2}{3}CK = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \\ KJ = \frac{1}{3}CK = \frac{a\sqrt{3}}{6} \end{cases}$)

Ta có : $A'B' \perp (KK'C'C)$

$\Rightarrow A'B' \perp K'J \Rightarrow$ K'J là đường cao hình thang A'B'FE

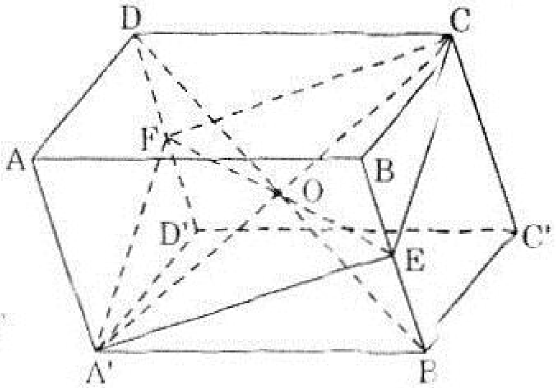
và có $K'J = \sqrt{KK'^2 + KJ^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{12}} = a\sqrt{\frac{13}{12}}$

$$\Rightarrow S_{A'B'FE} = \frac{A'B' + EF}{2}.K'J = \frac{a + \frac{2a}{3}}{2}.a\sqrt{\frac{13}{12}} = \frac{5a^2}{12}\sqrt{\frac{13}{3}}$$

Ta có : $V_{C.A'B'FE} = \frac{1}{3}CH.S_{A'B'FE} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2a}{\sqrt{13}}\cdot\frac{5a^2}{12}\sqrt{\frac{13}{3}} = \frac{5a^3}{18\sqrt{3}}$.

Bài 15. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BB' và DD'. Mặt phẳng (CEF) chia khối hộp trên làm hai khối đa diện. Tính tỉ số thể tích hai khối đa diện đó.

Giải



Gọi O = DB' ∩ EF

Mà ta có DD'B'B là hình bình hành, và EF là đường trung bình của DD'B'B ⇒ O là trung điểm của DB'

⇒ O là tâm của hình hộp ABCD.A'B'C'D'

⇒ CO qua A' ⇒ A' ∈ (CEF)

Vậy mp (CEF) cắt hình hộp theo thiết diện A'ECF.

Dễ dàng chứng minh được thiết diện A'ECF là hình bình hành.

Vậy mp (CEF) chia hình hộp ABCD.A'B'C'D' thành hai hình đa diện ABCDA'ECF và A'B'C'D'ECF.

Xét phép đối xứng qua tâm O, gọi là $Đ_O$.

Ta có : $Đ_O(A) = C'$, $Đ_O(B) = D'$, $Đ_O(C) = A'$, $Đ_O(D) = B'$

$Đ_O(A') = C$, $Đ_O(E) = F$, $Đ_O(C) = A'$, $Đ_O(F) = E$.

Vậy phép đối xứng qua tâm O biến hình đa diện ABCDA'ECF thành hình đa diện A'B'C'D'ECF.

⇒ Hai hình đa diện đó bằng nhau.

⇒ Tỉ số thể tích của chúng bằng 1.

TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 16. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có đỉnh là S, có cạnh đáy bằng a, chiều cao SH = h.

1. Xác định thiết diện tạo bởi hình chóp và mp (P) qua cạnh đáy BC và vuông góc cạnh bên SA.
2. Cho biết $\frac{h}{a} = \sqrt{3}$, mp (P) chia thể tích khối chóp S.ABC theo tỉ số nào ?

Đáp số : 1. ΔBCN với BN ⊥ SA; 2. $\frac{3}{17}$.

Bài 17. Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Các điểm E và F lần lượt là trung điểm của C'B' và C'D'.

1. Dựng thiết diện của khối lập phương khi cắt bởi mp (AEF).
2. Tính tỉ số thể tích hai phần của khối lập phương bị chia bởi mp (AEF).

Đáp số : 1. Thiết diện là ngũ giác. 2. $\frac{47}{25}$.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

Bài 1. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ ($0^0 < \varphi < 90^0$). Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và φ.

Bài 2. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC đỉnh S, độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC. Tính theo a diện tích ΔAMN, biết (AMN) ⊥ (SBC).

Bài 3. Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD ⊥ (ABC), AC = AD = 4a, AB = 3a và BC = 5a. Tính theo a :

1. Thể tích khối tứ diện ABCD.
2. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD).

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = a và SA ⊥ (ABCD). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC. Gọi I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng (SAC) vuông góc (SBM). Tính theo a thể tích khối tứ diện ANIB.

Bài 5. Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, SA = 2a và SA ⊥ (ABC). Gọi M và N là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích khối chóp A.BCMN.

Bài 6. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC.

1. Chứng minh rằng : $MN \perp BD$ và tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.
2. Cho biết cạnh bên hình chóp S.ABCD tạo với đáy một góc 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp tứ giác đều S.ABCD.

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B, $BA = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh rằng ΔSCD là tam giác vuông và tính theo a khoảng cách từ điểm H đến mp (SCD).

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh rằng $AM \perp BP$ và tính thể tích khối tứ diện CMNP.

Bài 9. Cho khối chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SD. Chứng minh rằng BCMN là hình chữ nhật và tính thể tích khối chóp S.BCMN theo a.

Bài 10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và (SAB) vuông góc mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

Bài 11. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông. $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C.

Bài 12. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mp (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'.ABC và cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C'.

HƯỚNG DẪN GIẢI

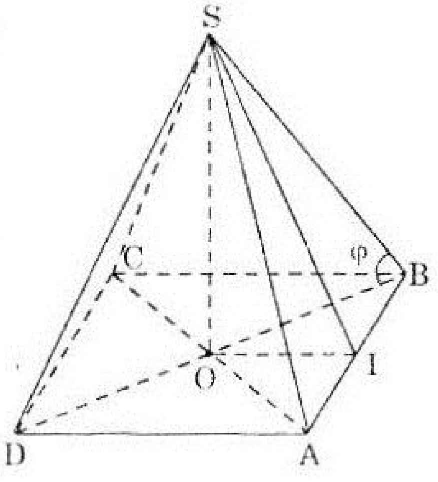
Bài 1. Gọi $O = AC \cap BD$

Vì S.ABCD là hình chóp đều $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Ta có OB là hình chiếu của SB trên (ABCD)

⇒ Góc giữa SB và (ABCD) là góc $(\widehat{SB, OB}) = \widehat{SBO} = \varphi$

Gọi I là trung điểm của AB $\Rightarrow \begin{cases} SI \perp AB \\ OI \perp AB \end{cases}$



⇒ Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) là góc $(\widehat{SI, OI}) = \widehat{SIO}$

- Xét ΔSOB vuông tại O, ta có :

$$\tan\varphi = \frac{SO}{OB} \Rightarrow SO = OB.\tan\varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi$$

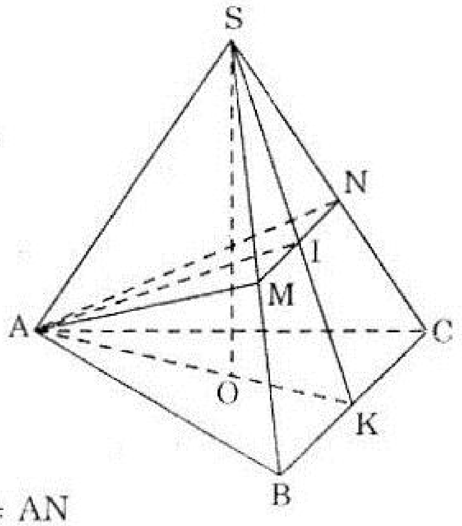
- Xét ΔSOI vuông tại O, ta có :

$$\tan\widehat{SIO} = \frac{SO}{OI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2}\tan\varphi$$

Và ta có : $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi\right).a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}\tan\varphi.$

Bài 2. Gọi O là tâm ΔABC ⇒ SO ⊥ (ABC)

Và K là trung điểm BC và $I = SK \cap MN$



Vì MN là đường trung bình của ΔSBC

$\Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC$ và MN // BC

$\Rightarrow \begin{cases} \text{I là trung điểm MN} \\ \text{I là trung điểm SK.} \end{cases}$

Ta có : ΔSAB = ΔSAC (c.c.c)

$\left.\begin{array}{l} \text{Mà AM là trung tuyến của } \Delta SAB \\ \quad \text{AN là trung tuyến của } \Delta SAC \end{array}\right\} \Rightarrow AM = AN$

⇒ ΔAMN cân tại A ⇒ AI ⊥ MN

Vậy ta có : $\begin{cases} (AMN) \perp (SBC) \\ (SBC) \cap (AMN) = MN \quad \Rightarrow AI \perp (SBC) \\ AI \perp MN \qquad\qquad\qquad \text{mà } SK \subset (SBC) \\ AI \subset (AMN) \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AI \perp SK \\ \text{Theo chứng minh trên AI là trung tuyến } \Delta SAK \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \Delta SAK$ cân tại A $\Rightarrow SA = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = SB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Mặt khác } AO \equiv AK \perp BC \text{ (do } \Delta ABC \text{ là tam giác đều)}\\ \text{và } AK \text{ là hình chiếu của } SK \text{ trên } (ABC)\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow SK \perp BC$ tại K (định lí ba đường vuông góc)

$\Rightarrow \Delta SBK$ vuông tại K

$$\Rightarrow SK = \sqrt{SB^2 - BK^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow IK = \frac{SK}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Xét ΔAIK vuông tại I, ta có :

$$AI = \sqrt{AK^2 - IK^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{40}}{8} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}AI.MN = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{10}}{4} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16} \text{ (đvdt).}$$

Bài 3.

1. Nhận xét : $AB^2 + AC^2 = 9a^2 + 16a^2 = 25a^2$

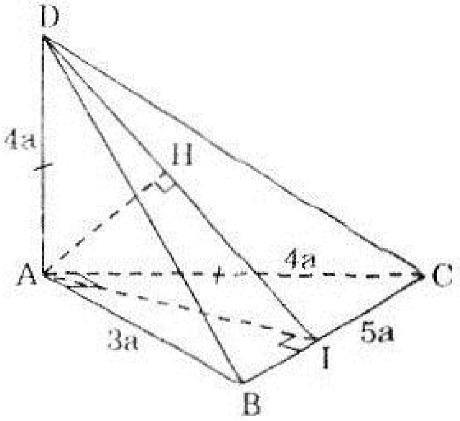
$BC^2 = (5a)^2 = 25a^2$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

$$\text{Vậy : } V_{ABCD} = \frac{1}{3}AD.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6}AD.AB.AC$$

$$= \frac{1}{6}.4a.3a.4a = 8a^3.$$



2. $$\left.\begin{array}{l}\text{Từ A vẽ } AI \perp CB \text{ tại I}\\ \quad \text{và có } DA \perp CB \text{ (do } DA \perp (ABC))\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow CB \perp (DAI)\\ \text{mà } CB \subset (CBD)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}(CBD) \perp (ADI)\\ \text{và } (CBD) \cap (ADI) = DI\\ \text{Từ A vẽ } AH \perp DI \text{ tại H}\end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (CBD)$$

$\Rightarrow d(A, (BCD)) = AH$

Xét ΔABC vuông tại A có AI là chiều cao :

$$\Rightarrow \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{16a^2} = \frac{25}{144a^2}$$

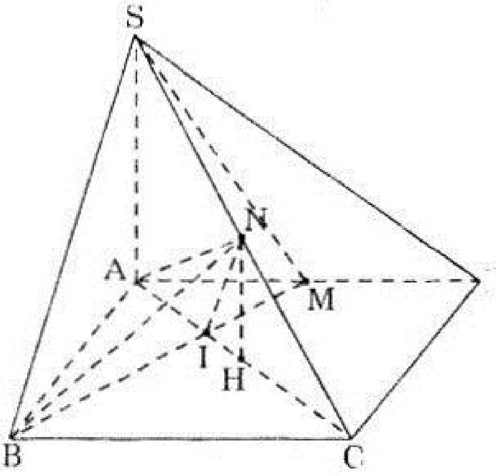
Xét ΔADI vuông tại A, có AH là chiều cao :

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{16a^2} + \frac{25}{144a^2} = \frac{34}{144a^2}$$

$$\Rightarrow AH^2 = \frac{144a^2}{34} \Rightarrow AH = \frac{12a}{\sqrt{34}} = \frac{6\sqrt{34}}{17}a.$$

Bài 4. Nhận xét : ΔABM và ΔBCA có :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{AB}{BC} \\ \text{và } \widehat{BAM} = \widehat{ABC} = 1v \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta BCA \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{BCA}$$



Xét : $\widehat{ABM} + \widehat{BAC} = \widehat{BCA} + \widehat{BAC} = 90^0$

(do ΔABC vuông tại B)

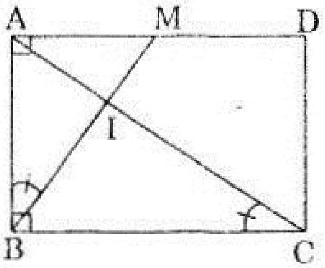
$$\Rightarrow \widehat{AIB} = 180^0 - (\widehat{ABM} + \widehat{BAC})$$

$$= 180^0 - 90^0 = 90^0$$

$$\Rightarrow MB \perp AC$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Mặt khác : } SA \perp (ABCD) \\ \text{và có } MB \subset (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow MB \perp SA$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vậy có : } MB \perp AC \\ MB \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow MB \perp (SAC) \text{ mà } MB \subset (SMB) \Rightarrow (SAC) \perp (SMB)$$



Gọi H là trung điểm AC

⇒ NH là đường trung bình của ΔSAC

$$\Rightarrow \begin{cases} NH = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2} \\ NH \,/\!/\, SA \end{cases}$$

mà SA ⊥ (ABCD) ⇒ NH ⊥ (ABCD) tại H.

$$\Rightarrow V_{ANIB} = \frac{1}{3}NH.S_{\Delta ABI} = \frac{1}{3}NH.\frac{1}{2}AI.IB = \frac{1}{6}NH.AI.IB$$

Xét ΔABM vuông tại A, có đường cao AI :

$$\Rightarrow \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{3}{a^2}$$

$$\Rightarrow AI^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Xét ΔABI vuông tại I, có : $BI^2 = AB^2 - AI^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$

$$\Rightarrow BI = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vậy : $V_{ANIB} = \frac{1}{6}.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{18}}{108} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Bài 5. Ta có : $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.2a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ta có : } SA \perp (ABC)\\ \text{mà } AB, AC \subset (ABC)\end{array}\right\} \Rightarrow SA \perp AB \text{ và } SA \perp AC$$

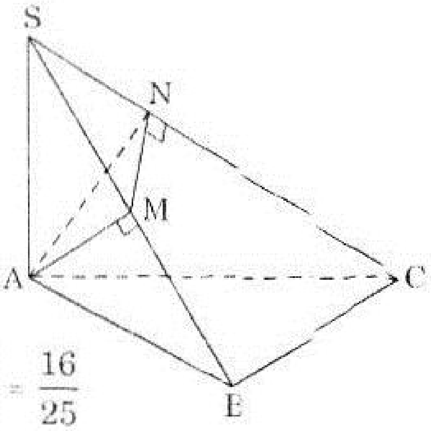
$\Rightarrow$ ΔSAC vuông tại A và ΔSAB vuông tại A và hai tam giác đó có hai đường cao lần lượt là AN và AM.

$$\text{Vậy có : } \left.\begin{array}{l}SA^2 = SN.SC\\ SA^2 = SM.SB\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{SN.SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SC^2} \text{ và } \frac{SM.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2}$$

$$\Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} \text{ và } \frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2}$$

Mặt khác $SC^2 = SA^2 + AC^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2$

và $SB^2 = SA^2 + AB^2 = 5a^2$



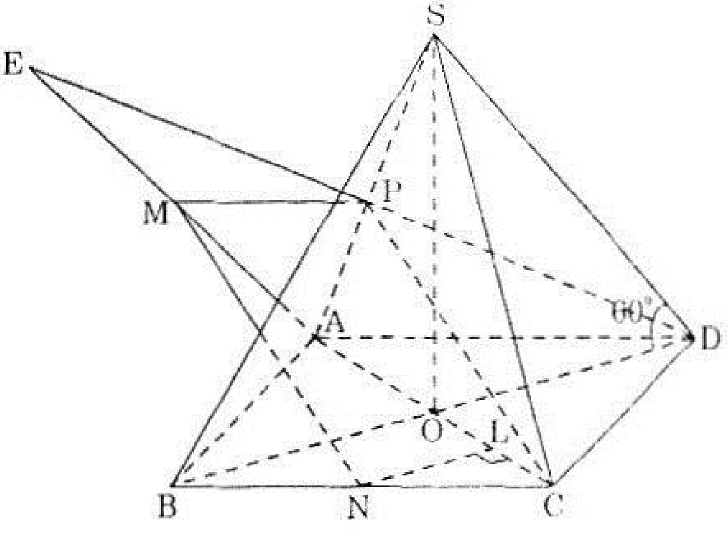
$$\text{Vậy suy ra : } \begin{cases}\frac{SN}{SC} = \frac{4a^2}{5a^2} = \frac{4}{5}\\ \frac{SM}{SB} = \frac{4a^2}{5a^2} = \frac{4}{5}\end{cases}$$

Ta có : $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA.SM.SN}{SA.SB.SC} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \frac{4}{5}.\frac{4}{5} = \frac{16}{25}$

$$\Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{16}{25}V_{S.ABC} = \frac{16}{25}.\frac{a^3\sqrt{3}}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{75}a^3$$

Vậy : $V_{A.BCNM} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} - \frac{8\sqrt{3}}{75}a^3 = \frac{3\sqrt{3}a^3}{50}$.

Bài 6.



1. Gọi P là trung điểm của SA, nên ta có MP là đường trung bình của

$$\Delta EAD \Rightarrow \begin{cases} MP \,//\, AD \\ MP = \dfrac{AD}{2} \end{cases} \quad (a)$$

Mặt khác ta lại có : $\begin{cases} NC \,//\, AD \\ NC = \dfrac{AD}{2} \end{cases} \quad (b)$

Từ (a) và (b) suy ra : $MP \,//\, NC$ và $MP = NC = \dfrac{AD}{2}$

$\Rightarrow$ MNCP là hình bình hành $\Rightarrow MN \,//\, CP$

Gọi O là tâm của đa giác đáy ABCD

$\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow SO \perp BD \quad (\text{do } BD \subset (ABCD)) \\ &\text{Lại có : } BD \perp AC \quad (\text{do ABCD là hình vuông} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow BD \perp (SAC) \\ &\text{mà } CP \subset (SAC) \end{aligned}\right\} \Rightarrow BD \perp CP; \text{ mà ta đã chứng minh } MN \,//\, CP$$

$$\Rightarrow MN \perp BD.$$

- Ta lại có : $MN \,//\, CP$ mà $CP \subset (SAC)$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow MN \,//\, (SAC) \\ &\text{và có : } AC \subset (SAC) \end{aligned}\right\} \Rightarrow d\,(MN, AC) = d\,(MN, (SAC)) = d\,(N, (SAC))$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Ta lại có : } (ABCD) \perp (SAC) \ (\text{vì } SO \perp (ABCD)) \\ &\qquad \text{với : } (ABCD) \cap (SAC) = AC \\ &\qquad\qquad \text{Từ N vẽ } NL \perp AC \text{ tại L} \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow NL \perp (SAC)$ tại L $\quad \Rightarrow NL = d\,(N, (SAC))$

Dễ thấy NL là đường trung bình của ΔBOC

$$\Rightarrow NL = \frac{BO}{2} = \frac{\frac{1}{2}BD}{2} = \frac{1}{4}BD = \frac{1}{4}.a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Vậy : $d\,(MN, AC) = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}.$

2. Ta có OD là hình chiếu của SD trên (ABCD)

$\Rightarrow$ góc giữa SD và (ABCD) là góc $(\widehat{SD, OD}) = \widehat{SDO} = 60^0$

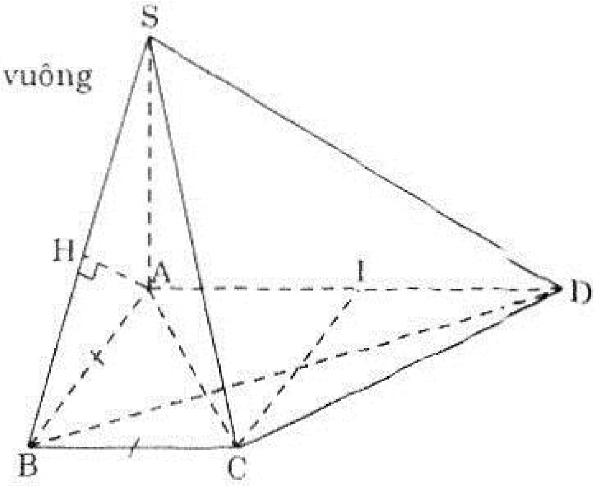
Xét ΔSOD vuông tại O, ta có : $\tan 60^0 = \dfrac{SO}{OD}$

$$\Rightarrow SO = OD.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Mà : $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Bài 7. • Gọi I là trung điểm của AD. Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} AI \parallel BC \\ AI = BC \\ AI = AB \\ \hat{A} = 1v \end{array}\right\} \Rightarrow \text{tứ giác ABCI là hình vuông}$$



$\Rightarrow CI = AB = a$

$\Rightarrow CI = \frac{AD}{2}$,

mà CI là trung tuyến của ΔACD

$\Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C.

$\Rightarrow AC \perp CD$

Mà AC là hình chiếu của SC trên mp (ABCD)

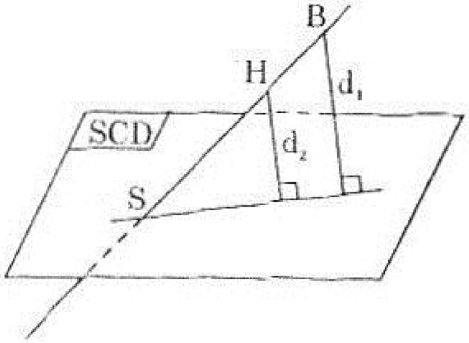
$\Rightarrow SC \perp CD$ (định lí ba đường vuông góc)

$\Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại C.

- Trong ΔSAB vuông tại A có đường cao là AH, ta có :

$$SA^2 = SH.SB \;\Rightarrow\; \frac{SH.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2}$$

$$\Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{2a^2}{2a^2 + a^2} = \frac{2}{3}$$



Gọi d_1 và d_2 lần lượt là khoảng cách từ B và H đến (SCD) thì :

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{SH}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{3}d_1$$

Ta tính d_1.

Xét tứ diện BCDS ta có : $V_{BCSD} = V_{S.BCD} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta BCD}$

Ta có ΔCID vuông cân tại I $\Rightarrow \widehat{ICD} = 45^0$ và $CD = AC = a\sqrt{2}$

Vậy $\widehat{BCD} = \widehat{BCI} + \widehat{ICD} = 90^0 + 45^0 = 135^0$

$$\Rightarrow S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}BC.CD.\sin 135^0 = \frac{1}{2}a.a\sqrt{2}.\sin 45^0 = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow V_{BCSD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \qquad (a)$$

Mặt khác : $V_{BCSD} = \frac{1}{3}d_1.S_{\Delta SCD} = \frac{1}{3}d_1.\left(\frac{1}{2}SC.CD\right)$

$$= \frac{1}{6}d_1.\sqrt{SA^2 + AC^2}.CD = \frac{1}{6}d_1\sqrt{2a^2 + 2a^2}.a\sqrt{2}$$

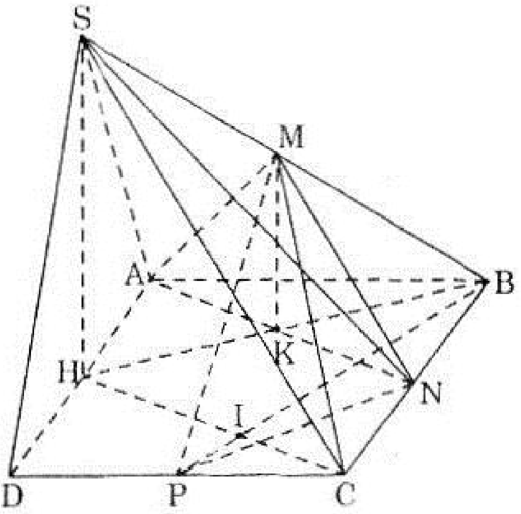
$$= \frac{1}{6}d_1.2a^2\sqrt{2} = \frac{d_1a^2\sqrt{2}}{3} \qquad (b)$$

Từ (a) và (b) ta có : $d_1\frac{a^2\sqrt{2}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \Rightarrow d_1 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.\frac{3}{a^2\sqrt{2}} = \frac{a}{2}$

$$\Rightarrow d_2 = \frac{2}{3}d_1 = \frac{2}{3}.\frac{a}{2} = \frac{a}{3}$$

Vậy $d(H, (SCD)) = \frac{a}{3}$.

Bài 8.



- Gọi H là trung điểm của AD ⇒ SH ⊥ AD (do ΔSAD là tam giác đều)

$$\text{Mà : } \left.\begin{array}{l} (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ SH \subset (SAD);\ SH \perp AD \end{array}\right\} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

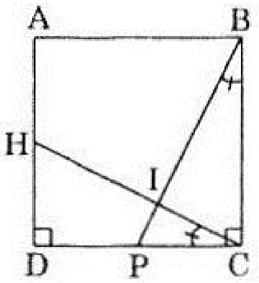
$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow SH \perp (ABCD) \\ \text{mà } BP \subset (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow BP \perp SH$$

Mặt khác trong hình vuông ABCD có : ΔDHC = ΔCPB

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \widehat{HCD} = \widehat{PBC} \\ \text{mà } \widehat{PBC} + \widehat{BPC} = 1v \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{HCD} + \widehat{BPC} = 1v$$

$$\Rightarrow \widehat{ICP} + \widehat{IPC} = 1v \quad \Rightarrow \widehat{PIC} = 1v \quad \Rightarrow BP \perp CH$$

$$\text{Vậy có : } \begin{cases} BP \perp SH \\ BP \perp CH \end{cases} \Rightarrow BP \perp (SHC) \quad (a)$$



Ta lại có : $\left.\begin{array}{l} AN \mathbin{/\!/} CH,\ CH \subset (SCH) \Rightarrow AN \mathbin{/\!/} (SCH) \\ MN \mathbin{/\!/} SC,\ SC \subset (SCH) \Rightarrow MN \mathbin{/\!/} (SCH) \end{array}\right\}$

$\Rightarrow (AMN) \mathbin{/\!/} (SCH) \qquad$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra : $\left.\begin{array}{r} BP \perp (AMN) \\ \text{mà} \quad AM \subset (AMN) \end{array}\right\} \Rightarrow AM \perp BP$

- $\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{Kẻ } MK \perp (ABCD) \text{ tại } K\ (K \in HB) \\ \text{mà } SH \perp (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow SH \mathbin{/\!/} MK \\ \qquad\qquad \text{mà M là trung điểm của SB} \end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ MK là đường trung bình của ΔSHB

$\Rightarrow MK = \dfrac{SH}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Và có : $S_{\Delta PCN} = \dfrac{1}{2}CP.CN = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2}{8}$

Vậy : $V_{CMNP} = \dfrac{1}{3}MK.S_{\Delta PCN} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a^2}{8} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{96}$ (đvtt).

Bài 9. • Ta có MN là đường trung bình của ΔSAD

$\Rightarrow MN = \dfrac{AD}{2} = a$ và $MN \mathbin{/\!/} AD$

Ta cũng có $BC \mathbin{/\!/} AD$ và $BC = a$

$\Rightarrow MN \mathbin{/\!/} BC$ và $MN = BC = a$

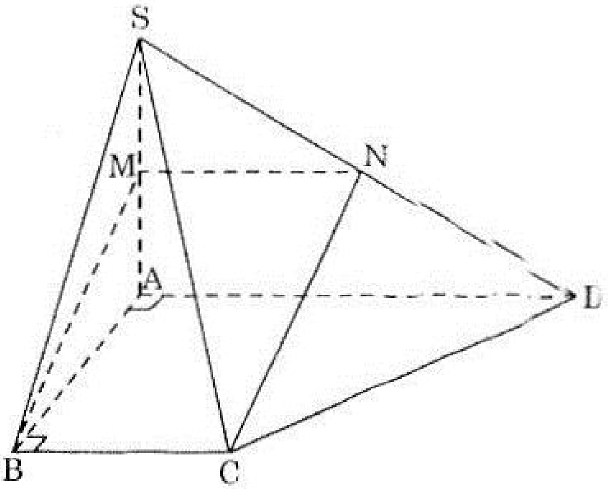
$\Rightarrow$ BCNM là hình bình hành (a)

Mặt khác :

$\left.\begin{array}{l} BC \perp AB \text{ (gt)} \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{array}\right\}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$ mà $BM \subset (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp BM \qquad$ (b)



Từ (a) và (b) suy ra tứ giác BCNM là hình chữ nhật.

- Ta có : $S_{BCNM} = 2S_{\Delta BCM} \quad \Rightarrow V_{S.BCNM} = 2V_{S.BCM}$

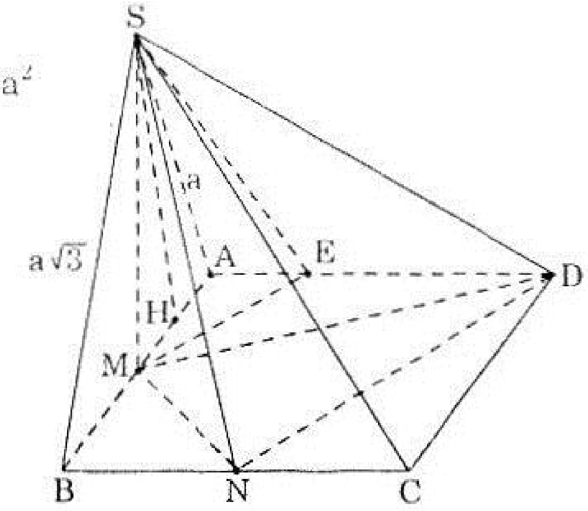
Mà $\quad V_{S.BCM} = V_{C.SBM} = \dfrac{1}{3}CB.S_{\Delta SBM} = \dfrac{1}{3}CB.\left(\dfrac{1}{2}BA.SM\right)$

$$= \frac{1}{6}a.a.a = \frac{a^3}{6}$$

Vậy : $V_{S.BCNM} = 2.\dfrac{a^3}{6} = \dfrac{a^3}{3}$ (đvtt).

Bài 10. • Gọi H là hình chiếu của S trên AB.

$$\text{Mà : }\left.\begin{array}{l}(SAB) \perp (ABCD)\\ (SAB) \cap (ABCD) = AB\\ SH \perp AB\\ SH \subset (SAB)\end{array}\right\} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$



Nhận xét : $SB^2 + SA^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2$

$AB^2 = 4a^2$

$\Rightarrow SA^2 + SB^2 = AB^2$

$\Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại S.

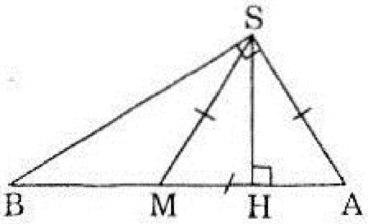
Mà SM là trung tuyến của ΔSAB

$$\Rightarrow SM = \frac{AB}{2} = a$$

Vậy ΔSMA có : $SM = AM = SA = a$

$\Rightarrow \Delta SAM$ là tam giác đều

$$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

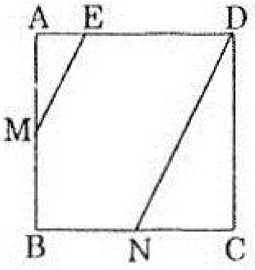


Ta có : $S_{BMDN} = S_{ABCD} - (S_{\Delta AMD} + S_{\Delta CND})$

$$= 4a^2 - \left(\frac{1}{2}a.2a + \frac{1}{2}a.2a\right) = 2a^2$$

$$\Rightarrow V_{S.BMDN} = \frac{1}{3}SH.S_{BMDN} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3} \text{ (đvtt).}$$

- Kẻ ME // DN với $E \in AD$.



$$\Rightarrow \Delta AEM \backsim \Delta CND \Rightarrow \frac{AE}{CN} = \frac{AM}{CD} = \frac{\frac{1}{2}CD}{CD} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow AE = \frac{1}{2}CN = \frac{a}{2}$$

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SM và DN.

Ta có : $(\widehat{SM, DN}) = (\widehat{SM, ME}) = \varphi$

Mặt khác ta có HA là hình chiếu vuông góc của SA trên (ABCD), mà $HA \perp AE \Rightarrow SA \perp AE$ (định lí ba đường vuông góc) hay ΔSAE vuông tại A.

$$\Rightarrow SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Ta lại có : $ME = \sqrt{AM^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow$ SE = ME hay ΔSME cân tại E.

$\Rightarrow$ $\widehat{SME}$ là góc nhọn

$\Rightarrow (\widehat{SM, ME}) = \widehat{SME} = \varphi$

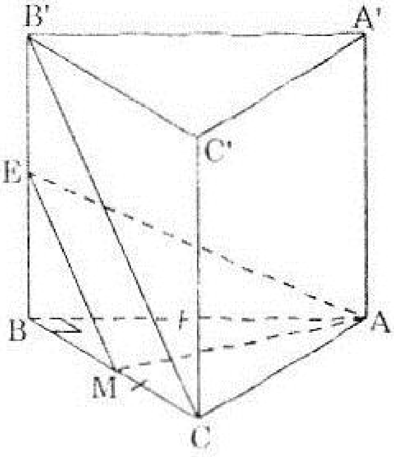
Xét ΔSME ta có : $SE^2 = SM^2 + ME^2 - 2SM.ME.\cos\varphi$

$$\Leftrightarrow 2SM.ME.\cos\varphi = SM^2$$

$$\Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{SM}{2ME} = \frac{a}{2.\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Vậy cosin giữa hai đường thẳng SM và DN là $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Bài 11. • Ta có ΔABC vuông cân tại B.



Vậy : $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = AA'.\frac{1}{2}AB.BC$

$$= \frac{1}{2}a\sqrt{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{2} \text{ (đvtt)}$$

- Gọi E là trung điểm BB'

$\Rightarrow$ EM là đường trung bình của $\Delta BB'C$

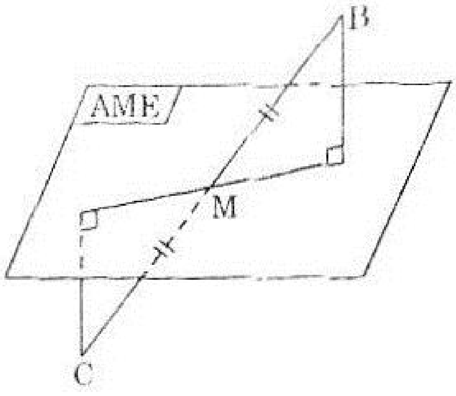
$\Rightarrow$ EM // B'C, mà EM $\subset$ (AEM)

$\Rightarrow$ B'C // (AEM)

$\Rightarrow$ d (AM, B'C) = d (B'C, (AEM)) = d (C, (AME)) = d (B, (AME)) = h

Xét tứ diện BAEM, ta có BE, BM, BA đôi một vuông góc

$\Rightarrow$ tứ diện BAEM là tứ diện vuông tại B.



$$\Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{BE^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BA^2} \quad \text{(lớp 11)}$$

$$= \frac{2}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{a^2}$$

$\Rightarrow h^2 = \frac{a^2}{7} \quad \Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{7}}{7}$

Vậy : d (AM, B'C) = $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Bài 12. • Gọi H là trung điểm BC, theo giả thiết ta có : $A'H \perp (ABC)$

Mà AH là trung tuyến của tam giác vuông ABC

$$\Rightarrow AH = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

Xét $\Delta AHA'$ vuông tại H, ta có

$$A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

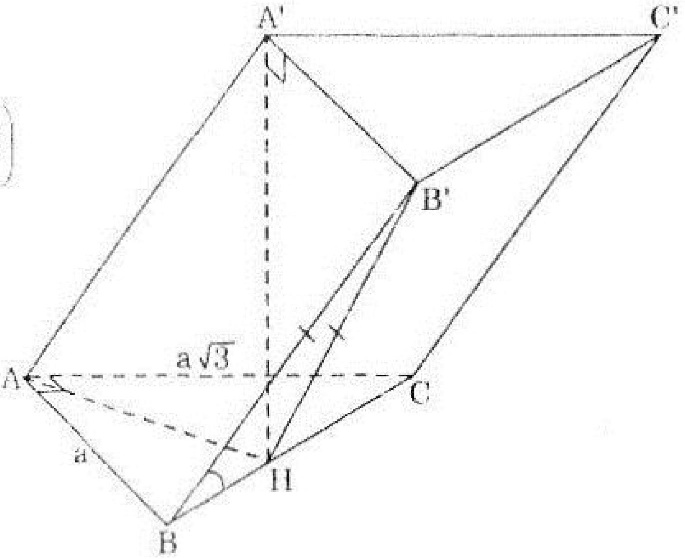
Vậy : $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}A'H.S_{\Delta ABC}$

$$= \frac{1}{3}A'H.\left(\frac{1}{2}AB.AC\right)$$

$$= \frac{1}{6}A'H.AB.AC$$

$$= \frac{1}{6}a\sqrt{3}.a.a\sqrt{3}$$

$$= \frac{a^3}{2} \text{ (dvtt).}$$



- Gọi $\varphi = (\widehat{AA', B'C'})$

Vì : AA' // BB' và B'C' // BC $\Rightarrow (\widehat{AA', B'C'}) = (\widehat{BB', BC}) \Rightarrow (\widehat{BB', BC}) = \varphi$

Ta có : $BH = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = a$

Xét $\Delta A'B'H$ vuông tại A' (vì $A'H \perp (A'B'C')$)

$\Rightarrow HB' = \sqrt{A'H^2 + A'B'^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$ mà BB' = 2a

$\Rightarrow \Delta BB'H$ cân tại B' $\Rightarrow \widehat{B'BH}$ là góc nhọn $\Rightarrow (\widehat{BB', BC}) = \widehat{B'BH} = \varphi$

Xét $\Delta BB'H$, ta có : $B'H^2 = BB'^2 + BH^2 - 2BB'.BH.\cos\widehat{B'BH}$

$$\Leftrightarrow 2BB'.BH.\cos\varphi = BH^2 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{BH}{2BB'} = \frac{a}{2.2a} = \frac{1}{4}$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C' có cosin bằng $\frac{1}{4}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III

Câu 1. Cho khối đa diện, trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

A. Mỗi mặt có ít nhất ba cạnh.

B. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh.

C. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

D. Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

A. Hình tạo bởi hai tứ diện đều ghép với nhau là một hình đa diện lồi.

B. Hình hộp là hình đa diện lồi.

C. Tứ diện đều là đa diện lồi.

D. Hình lăng trụ tứ giác là hình tứ diện lồi.

Câu 3. Số cạnh của một hình bát diện đều là :

A. 10 B. 12 C. 8 D. 16.

Câu 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

Số các cạnh của hình đa diện luôn luôn :

A. lớn hơn hoặc bằng 6 B. lớn hơn 7

C. lớn hơn 6 D. lớn hơn hoặc bằng 7.

Câu 5. Thể tích của khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ C. $\frac{a^3}{4}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Câu 6. Cho hình lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a, thể tích của khối lăng trụ tương ứng bằng :

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Câu 7. Cho khối lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a. Thể tích khối tứ diện A'BB'C' bằng :

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{a^3}{12}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 8. Cho hình tứ diện ABCD. Gọi B' và C' lần lượt là trung điểm của AB và AC. Khi đó tỉ số thể tích của hai khối tứ diện ABCD và AB'C'D bằng :

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$.

Câu 9. Cho khối chóp O.ABC, trên ba cạnh OA, OB và OC lần lượt lấy ba điểm A', B' và C' sao cho :

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{2};\ \frac{OB'}{OB} = \frac{1}{4} \text{ và } \frac{OC'}{OC} = \frac{1}{3}.$$

Ta có $\frac{V_{O.A'B'C'}}{V_{O.ABC}}$ bằng :

A. $\frac{1}{24}$ B. $\frac{1}{12}$ C. $\frac{1}{16}$ D. $\frac{1}{32}$.

Câu 10. Cho khối tứ diện O.ABC vuông tại O có OA = a, OB = OC = 2a. Thể tích khối tứ diện vuông O.ABC bằng :

A. $\frac{a^3}{2}$ B. a^3 C. $\frac{2a^3}{3}$ D. $\frac{a^3}{6}$.

Câu 11. Cho khối lăng trụ ABC.A'B'C'. Tỉ số giữa khối chóp A'.ABC và khối lăng trụ đó bằng :

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$.

Câu 12. Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tỉ số thể tích giữa khối chóp A'.ABD và khối lập phương bằng bao nhiêu ?

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$.

Câu 13. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có thể tích bằng V. Lấy điểm A' trên cạnh SA sao cho $SA' = \frac{1}{3}SA$. Mặt phẳng (P) qua A' và song song với đáy của hình chóp cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Khi đó thể tích khối chóp S.A'B'C'D' bằng :

A. $\frac{V}{27}$ B. $\frac{V}{18}$ C. $\frac{V}{32}$ D. $\frac{V}{14}$.

Câu 14. Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30^0. Hình chiếu A' trên (ABC) là trung điểm cạnh BC. Thể tích khối lăng trụ bằng :

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 15. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có diện tích các mặt ABCD, ABB'A', ADD'A' lần lượt bằng $25cm^2$, $16cm^2$, $36cm^2$. Thể tích của hình hộp bằng :

A. $120cm^3$ B. $140cm^3$ C. $100cm^3$ D. $160cm^3$.

Câu 16. Cho hình chóp S.ABC, có SA ⊥ (ABC) và đáy ABC là tam giác vuông tại A. Cho biết SA = 2cm, AB = 4cm và AC = 3cm. Thể tích hình chóp bằng :

A. $\frac{24}{5}cm^3$ B. $\frac{12}{3}cm^3$ C. $\frac{24}{3}cm^3$ D. $24cm^3$.

Câu 17. Một hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng 2a và chiều cao bằng a. Khi đó thể tích hình chóp bằng :

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^3$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}a^3$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$.

Câu 18. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với đáy một góc 45^0. Thể tích khối chóp bằng :

A. $\frac{a^3}{12}$ B. $\frac{a^3}{4}$ C. $\frac{a^3}{2}$ D. $\frac{a^3}{6}$.

Câu 19. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với đáy một góc 60^0. Thể tích khối chóp bằng :

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 20. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, biết AB = a và góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng φ. Thể tích hình chóp bằng :

A. $\frac{a^3\tan\varphi}{6}$ B. $\frac{a^3\tan\varphi}{3}$ C. $\frac{a^3\tan\varphi}{12}$ D. $a^3\tan\varphi$.

Câu 21. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Tổng diện tích các mặt bên của hình chóp bằng :

A. $2a^2$ B. $4a^2$ C. $6a^2$ D. $\frac{3}{2}a^2$.

Câu 22. Cho khối lăng trụ có chiều cao bằng a và đáy là một lục giác đều nội tiếp đường tròn có bán kính là r. Thể tích khối lăng trụ bằng :

A. $\frac{ar^2\sqrt{3}}{12}$ B. $\frac{ar^2\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3}{4}ar^2\sqrt{3}$ D. $\frac{3}{2}ar^2\sqrt{3}$.

Câu 23. Thể tích khối tứ diện đều cạnh là a bằng :

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 24. Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và $\widehat{ASB} = 2\varphi$. Chiều cao hình chóp bằng :

A. $\frac{a}{3}\frac{\sqrt{3+\tan^2\varphi}}{\tan\varphi}$ B. $\frac{a\sqrt{3-\tan^2\varphi}}{\sqrt{12}\tan\varphi}$

C. $\frac{a}{\sqrt{12}}\sqrt{3-2\tan^2\varphi}$ D. $\frac{a}{\sqrt{12}}\sqrt{3+\tan^2\varphi}$.

Câu 25. Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và mặt bên có góc ở đáy bằng φ. Chiều cao của hình chóp bằng :

A. $\frac{a}{3}\sqrt{9\tan^2\varphi-3}$ B. $\frac{a}{6}\sqrt{9\tan^2\varphi-3}$

C. $a\sqrt{9\tan^2\varphi-3}$ D. $\frac{a}{2}\sqrt{9\tan^2\varphi+3}$.

Câu 26. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{C} = 60^0$, AC = a và AC' = 3a.

Thể tích khối lăng trụ bằng :

A. $a^3\sqrt{6}$ B. $\frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$ C. $a^3\sqrt{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. D 2. A 3. B 4. A 5. B 6. C 7. D 8. C 9. A
10. C 11. B 12. D 13. A 14. C 15. A 16. C 17. B 18. D
19. D 20. A 21. A 22. D 23. C 24. B 25. B 26. A

Chương IV. MẶT CẦU – MẶT TRỤ – MẶT NÓN

CHỦ ĐỀ 23. Mặt cầu – Khối cầu

1. Định nghĩa

Tập hợp các điểm trong không gian cách đều điểm O cố định một khoảng cách R không đổi gọi là mặt cầu có tâm là O và bán kính bằng R.

Kí hiệu : *$S(O; R)$*

Vậy : $S(O; R) = \{M / OM = R\}$

Thuật ngữ : *Cho mặt cầu $S(O; R)$ và một điểm A.*

* *$OA = R$: $A \in S(O; R)$; đoạn thẳng OA được gọi là bán kính của mặt cầu.*

- *OA, OB là hai bán kính của mặt cầu và O, A, B thẳng hàng. Ta nói đoạn AB là một đường kính của mặt cầu.*
- *Một mặt cầu được xác định khi biết tâm và bán kính R hoặc biết một đường kính của nó.*

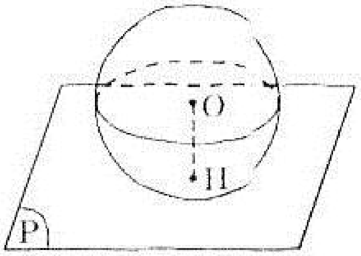
* *$OA < R$: A nằm trong mặt cầu.*

* *$OA > R$: A nằm ngoài mặt cầu.*

* *Khối cầu $S(O; R) = \{M / OM \le R\}$.*

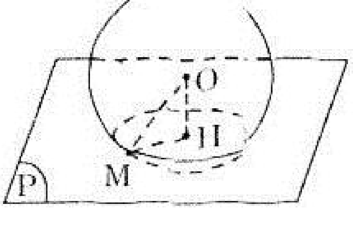
2. Giao của một mặt cầu và một mặt phẳng

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và mp (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mp (P) và $h = OH = d(O, mp(P))$



* *$h > R$: (P) và $S(O; R)$ không có điểm chung.*

* *$h = R$: (P) tiếp xúc $S(O; R)$ tại điểm H (H là điểm chung duy nhất), H : tiếp điểm.*



* *$h < R$: (P) cắt $S(O; R)$ theo một đường tròn và có bán kính $r = \sqrt{R^2 - h^2}$*

* *Đặc biệt : $h = 0$ ta có $O \in (P)$, ta nói :*

- *(P) là mặt phẳng kính.*
- *Giao tuyến của mặt kính với mặt cầu $S(O; R)$ là đường tròn có bán kính R, đường tròn đó gọi là đường tròn lớn.*

3. Giao của mặt cầu với đường thẳng – Tiếp tuyến của mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và đường thẳng Δ.

Gọi H là hình chiếu của O trên Δ và $d = OH = d(O; \Delta)$

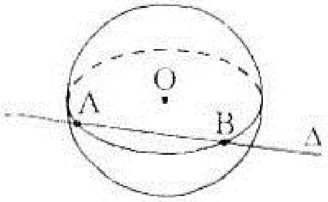
* $d < R$: Δ cắt $S(O; R)$ tại hai điểm phân biệt.

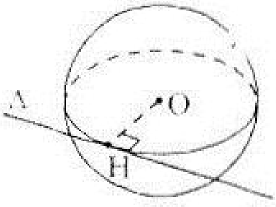
* $d = R$: Δ cắt $S(O; R)$ tại một điểm duy nhất là H.

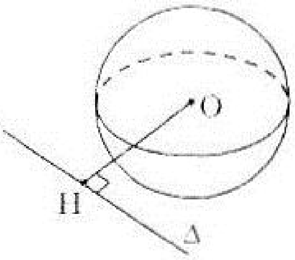
Ta nói : Δ tiếp xúc với $S(O; R)$ tại H

H là tiếp điểm, Δ là tiếp tuyến của mặt cầu.

* $d > R$: Δ không cắt mặt cầu.







Vậy : Δ tiếp xúc mặt cầu $S(O; R)$ tại H khi và chỉ khi Δ vuông góc với bán kính OH tại điểm H.

Định lí 1 : *Qua một điểm A nằm trên mặt cầu $S(O; R)$ có vô số tiếp tuyến của mặt cầu, khi đó : Tất cả các tiếp tuyến đó đều vuông góc với bán kính OA của mặt cầu tại A và đều nằm trên mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm A đó.*

Định lí 2 : *Qua điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O; R)$ thì có vô số các tiếp tuyến với mặt cầu, khi đó :*

(i) Độ dài các đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm bằng nhau.

(ii) Tập hợp các tiếp điểm là một đường tròn nằm trên mặt cầu.

4. Diện tích – Thể tích

Cho mặt cầu có bán kính R. Ta có :

- $S = 4\pi R^2$: *diện tích mặt cầu*
- $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$: *thể tích khối cầu tương ứng.*

Dạng 1. Chứng minh các điểm cùng nằm trên một mặt cầu

- ***Phương pháp 1 :*** *Chứng minh các điểm nhìn hai điểm cố định A, B dưới một góc vuông. Khi đó mặt cầu có đường kính AB.*
- ***Phương pháp 2 :*** *Chứng minh các điểm đó cách đều một điểm O cố định bằng một khoảng cách không đổi R. Khi đó mặt cầu là $S(O; R)$.*

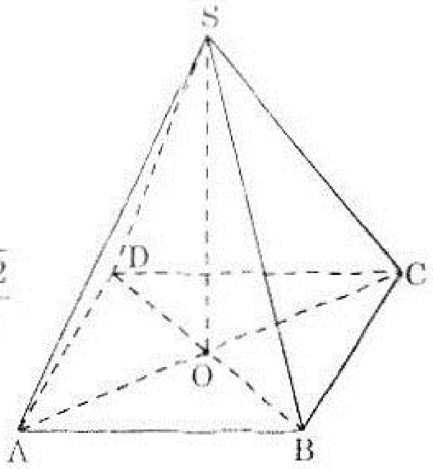
Bài 1. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Chứng minh rằng các điểm S, A, B, C, D cùng nằm trên một mặt cầu. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu đó.

Giải

Gọi O là tâm hình vuông ABCD $\Rightarrow$ SO $\perp$ (ABCD) (do S.ABCD là hình chóp đều) $\Rightarrow$ SO $\perp$ OA $\Rightarrow$ ΔSOA vuông tại O, nên có :

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



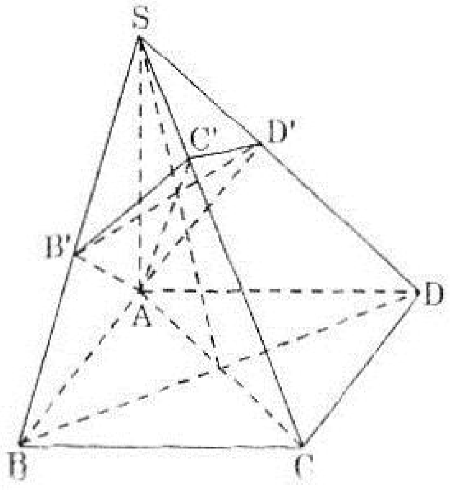
Vậy ta có : $OA = OB = OC = OD = OS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

⇒ Các điểm S, A, B, C, D cùng nằm trên một mặt cầu tâm O có bán kính $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bài 2. Trong mp (P) cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trên đường thẳng $Ax \perp (P)$ ta lấy điểm S tùy ý ($S \neq A$), dựng mp (Q) qua A và vuông góc đường thẳng SC. Mp (Q) cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'.

1. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D, B', C', D' luôn thuộc một mặt cầu cố định.
2. Tính diện tích mặt cầu đó và thể tích của khối cầu tạo được.

Giải



1. Ta có : $\left.\begin{array}{l}(Q) \perp SC \\ \text{mà } AC' \subset (Q)\end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp AC' \Rightarrow \widehat{AC'C} = 1v$ (a)

Ta lại có : $\left.\begin{array}{l}CD \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \\ CD \perp AD\end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD)$ mà $AD' \subset (SAD)$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AD' \perp CD \\ \text{Ta có : } AD' \perp SC \text{ (do } AD' \subset (Q),\ SC \perp (Q))\end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AD' \perp (SCD) \\ CD' \subset (SCD)\end{array}\right\} \Rightarrow AD' \perp D'C \Rightarrow \widehat{AD'C} = 1v \\ \text{Chứng minh tương tự : } \widehat{AB'C} = 1v\end{array}\right\} \text{(b)}$$

Ta cũng có : $\left.\begin{array}{l}\widehat{ABC} = 1v \\ \widehat{ADC} = 1v\end{array}\right\}$ (c)

Từ (a), (b) và (c) suy ra các điểm : A, B, C, D, B', C', D' cùng thuộc mặt cầu (S) đường kính AC cố định.

2. Ta có bán kính của mặt cầu (S) là : $R = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow$ Diện tích mặt cầu (S) = $4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi a^2$

và thể tích khối cầu tạo được : $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi a^3$.

Bài 3. Trong không gian cho ba đoạn thẳng AB, BC, CD sao cho AB ⊥ BC, BC ⊥ CD và CD ⊥ AB.

1. Chứng minh rằng có mặt cầu qua bốn điểm A, B, C, D.
2. Cho biết AB = a, BC = b và CD = c. Tính bán kính mặt cầu đó.

Giải

1. Ta có : $\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AB \perp BC \\ AB \perp CD\ (gt)\end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (BCD) \\ \qquad\qquad\qquad\text{và có BC là hình chiếu của AC trên (BCD)} \\ \qquad\qquad\qquad BC \perp CD\ (gt)\end{array}\right\}$

$\Rightarrow AC \perp CD$ (định lí ba đường vuông góc)

$\Rightarrow \widehat{ACD} = 1v$ (a)

Vì : $\left.\begin{array}{l}AB \perp (BCD) \\ BD \subset (BCD)\end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp BD \Rightarrow \widehat{ABD} = 1v$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra bốn điểm A, B, C, D thuộc mặt cầu đường kính AD.

2. Xét ΔABC vuông tại A, ta có :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2$

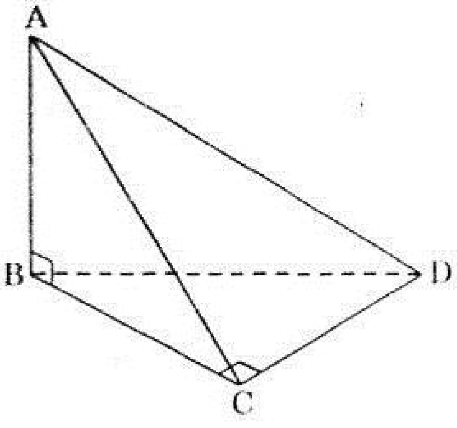
Xét ΔACD vuông tại C, ta có :

$AD^2 = AC^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$\Rightarrow AD = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Vậy bán kính mặt cầu là :

$R = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



Bài 4. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc nhau và $(P) \cap (Q) = \Delta$. Trên Δ lấy hai điểm A, B sao cho AB = a. Trong mp (P) lấy điểm C trong mp (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và AC = BD = AB.

1. Chứng minh có một mặt cầu qua bốn điểm A, B, C, D.
2. Tính bán kính mặt cầu đó và tính d (A, BCD)).

Giải

1. Ta có :

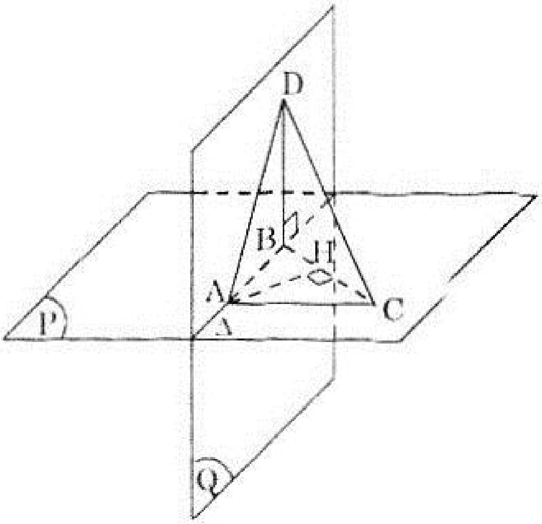
$$\left.\begin{array}{l} AC \perp \Delta \\ \Delta = (P) \cap (Q) \\ (P) \perp (Q) \\ AC \subset (P) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AC \perp (Q) \\ \text{mà } AD \subset (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp AD \Rightarrow \widehat{CAD} = 1v \ (a)$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$\left.\begin{array}{r} BD \perp (P) \\ \text{mà } BC \subset (P) \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp BC \Rightarrow \widehat{DBC} = 1v \ (b)$$

Từ (a) và (b) suy ra bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một mặt cầu (S) có đường kính là DC.

2.• Ta có bán kính mặt cầu là $R = \dfrac{DC}{2}$.



ΔABC là tam giác vuông cân tại A

$\Rightarrow BC = AC\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

Xét ΔDBC vuông tại B, ta có :

$$DC = \sqrt{DB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2}$$

$$= \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

• Gọi H là trung điểm của BC $\Rightarrow AH \perp BC$ (do ΔABC vuông cân tạ A)

Theo chứng minh trên : $\left.\begin{array}{l} DB \perp (P) \\ DB \subset (BCD) \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad (P) \perp (BCD) \\ \text{và có } (P) \cap (BCD) = BC \\ \quad AH \subset (P) \\ \quad AH \perp BC \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow AH \perp (BCD) \text{ tại } H \\ \Rightarrow AH = d\,(A, (BCD)) \end{array}$$

do ΔABC vuông cân tại A $\Rightarrow AH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AC\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy : $d\,(A, (BCD)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình thang vuông ABCD với đường cao AB = a, đáy nhỏ BC = a, đáy lớn AD = 2a, SA ⊥ (ABCD) sao cho $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của SA.

1. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng :

   a) SB và AD   b) AD và SC.

2. Kẻ EK ⊥ SD tại K. Chứng minh rằng sáu điểm S, A, B, C, E, K cùng thuộc một mặt cầu. Tính bán kính mặt cầu đó theo a.

Giải

1.a.) Ta có : $\left.\begin{array}{l} AD \perp AB \text{ (gt)} \\ AD \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABCD)) \end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp (SAB)$

Từ A vẽ AH ⊥ SB tại H   (a)

$\left.\begin{array}{r} \text{Theo chứng minh trên } AD \perp (SAB) \\ \text{mà } AH \subset (SAB) \end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp AD \text{ tại A} \quad (b)$

Từ (a) và (b) suy ra AH là đoạn vuông góc chung của SB và AD

$\Rightarrow AH = d(SB, AD)$.

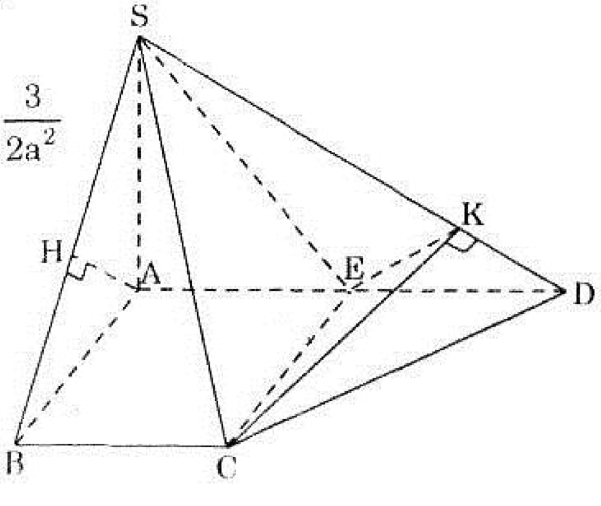
Xét ΔSAB vuông tại A, có đường cao là AH, ta có :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2}$$

$$\Rightarrow AH^2 = \frac{2a^2}{3}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vậy : $d(SB, AD) = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



b)) Ta có : $\left.\begin{array}{l} AD \parallel BC,\ \ BC \subset (SBC) \Rightarrow AD \parallel (SBC) \\ \text{và có } SC \subset (SBC) \end{array}\right\}$

$\Rightarrow d(AD, SC) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC))$

Ta có : $\left.\begin{array}{l} BC \perp AB \text{ (gt)} \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \text{ mà } BC \subset (SBC)$

$\left.\begin{array}{ll} \Rightarrow & (SAB) \perp (SBC) \\ & (SAB) \cap (SBC) = SB \\ \text{mà} & AH \perp SB \text{ và } AH \subset (SAB) \end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (SBC) \text{ tại H.}$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AH = d(A, (SBC)) \\ \text{mà } AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \text{ (chứng minh câu 1)}\end{array}\right\} \Rightarrow d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

hay $d(AD; SC) = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

2. Ta chứng minh được tứ giác ABCE là hình chữ nhật.

$$\text{Ta lại có : } \left.\begin{array}{l}AE \text{ là hình chiếu của } SE \text{ trên } (ABCE) \\ \text{mà } AE \perp CE\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow SE \perp CE \text{ (Định lí 3 đường vuông góc)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \widehat{SEC} = 1v \\ \text{Chứng minh tương tự } \widehat{SBC} = 1v\end{array}\right| \qquad (a)$$

$$\text{Và lại có : } \left.\begin{array}{r}SA \perp (ABCD) \\ \text{mà } AC \subset (ABCD)\end{array}\right\} \Rightarrow SA \perp AC \ , \Rightarrow \widehat{SAC} = 1v \qquad (b)$$

$$\text{Mặt khác : } \left.\begin{array}{l}CE \perp AD \text{ (do ABCE là hình vuông)} \\ CE \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD))\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow CE \perp (SAD) \\ \text{mà } SD \subset (SAD)\end{array}\right\} \Rightarrow SD \perp CE \\ \qquad\qquad\qquad \text{mà có : } SD \perp EK \text{ (gt)}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow SD \perp (CEK) \\ \text{mà : } CK \subset (CEK)\end{array}\right\} \Rightarrow SD \perp CK \text{ tại } K \Rightarrow \widehat{SKC} = 1v \qquad (c)$$

Từ (a), (b) và (c) suy ra : Sáu điểm S, A, B, C, E, K cùng thuộc mặt cầu (S) có đường kính là SC.

Gọi R là bán kính của (S)

$$\Rightarrow R = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{2a^2 + 2a^2}}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

Vậy bán kính của (S) bằng R = a.

Bài 6. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D, A', B', C', D' cùng nằm trên một mặt cầu và tính thể tích khối cầu đó.

Giải

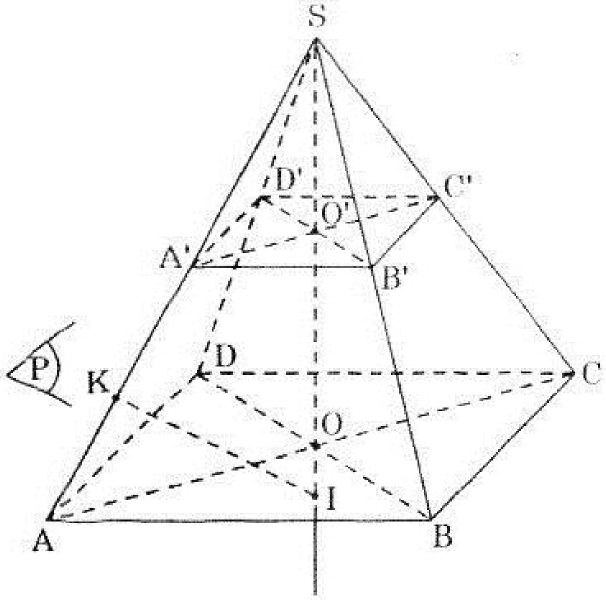
- Gọi SO là chiều cao hình chóp đều SABCD với O = AC ∩ BD

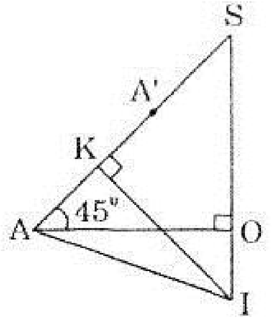
$\Rightarrow$ SO qua tâm O' của hình vuông A'B'C'D'.

Ta có SO là trục đường tròn nội tiếp hình vuông ABCD và SO cũng là trục đường tròn nội tiếp hình vuông A'B'C'D'.

Vậy mọi điểm nằm trên SO đều cách đều bốn điểm A, B, C, D và cũng cách đều bốn điểm A', B', C', D'.

Vì vậy ta chỉ cần tìm trên SO một điểm I sao cho cách đều các điểm A, B, C, D, A', B', C', D'.





Dựng mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực đoạn thẳng AA' với (P) qua trung điểm K của AA' và gọi I = mp (P) ∩ SO

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in (P) \\ I \in SO \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA = IA' \\ IA = IB = IC = ID \\ IA' = IB' = IC' = ID' \end{cases}$$

$\Rightarrow IA = IB = IC = ID = IA' = IB' = IC' = ID'$

$\Rightarrow$ Tám điểm A, B, C, D, A', B', C', D' cùng nằm trên một mặt cầu (S) có tâm là I và có bán kính R = IA.

- Nhận xét : $\left.\begin{array}{l} SA^2 + SC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \\ AC^2 = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow SA^2 + SC^2 = AC^2$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại S $\Rightarrow \widehat{SAO} = 45^0 \Rightarrow \widehat{KIS} = 45^0$

$\Rightarrow \Delta SKI$ vuông cân tại K $\Rightarrow IK = SK = \dfrac{3a}{4}$

Xét ΔKAI vuông tại K, ta có :

$$AI = \sqrt{AK^2 + KI^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{10a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

Thể tích khối cầu là :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{a^3\,10\sqrt{10}}{4^3} = \frac{\pi a^3\,10\sqrt{10}}{48} = \frac{5\pi a^3\sqrt{10}}{24} \text{ (đvtt).}$$

Dạng 2. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, hình lăng trụ

- *Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp hay hình lăng trụ, là một mặt cầu qua các đỉnh của hình chóp hay hình lăng trụ.*
- *– Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của hình chóp là đa giác nội tiếp.*

  – Điều kiện cần và đủ để một hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp là hình lăng trụ đó phải là hình lăng trụ đứng và có đáy là một đa giác nội tiếp.
- ***Phương pháp :***

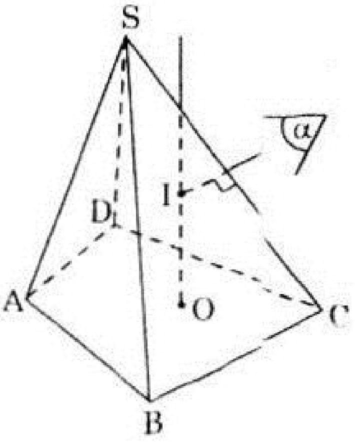
  Xác định tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

  Thông thường là thực hiện như sau :

  – Dựng trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy của hình chóp là Δ.

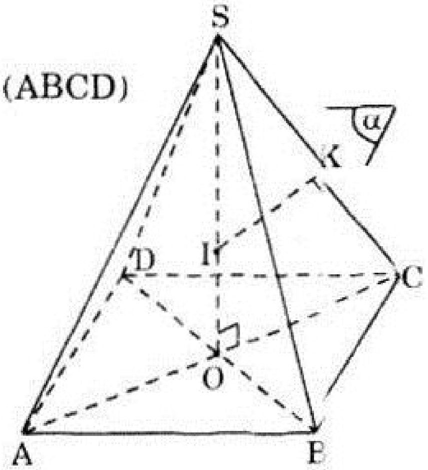
  – Dựng mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên nào đó của hình chóp.

  – Tâm mặt cầu là $I = \Delta \cap (\alpha)$.



Bài 7. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a. Hãy xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

Giải



- Gọi O là tâm của hình vuông ABCD $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$ và SO là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD.

  Dựng mp (α) là mặt phẳng trung trực của cạnh SC (mp (α) qua K là trung điểm của SC) cắt SO tại I

  $$\Rightarrow \begin{cases} I \in SO \\ I \in mp\,(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC = ID \\ IC = IS \end{cases}$$

  $\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.
- Trong mp (SOC) ta có tứ giác OIKC là tứ giác nội tiếp

  $\Rightarrow SI.SO = SK.SC$

  $\Rightarrow R = SI = \dfrac{SK.SC}{SO} = \dfrac{SC^2}{2SO}$ (với R bán kính mặt cầu)

  Xét ΔSOC vuông tại O, ta có :

$$SO^2 = SC^2 - OC^2 = 4a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{7a^2}{2}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$$

Vậy bán kính mặt cầu là :

$$R = \frac{(2a)^2}{2.\frac{a\sqrt{14}}{2}} = \frac{4a^2}{a\sqrt{14}} = \frac{4a}{\sqrt{14}} = \frac{4a\sqrt{14}}{14} = \frac{2a\sqrt{14}}{7}.$$

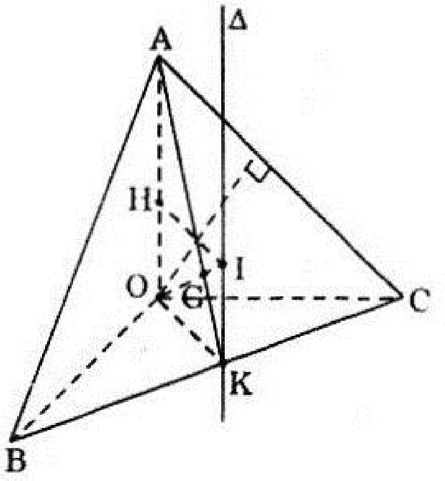
- ***Nhận xét :*** *Qua bài toán trên, để xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có các cạnh bên bằng nhau, ta thực hiện như sau :*

- *Dựng trục Δ của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy ($S \in \Delta$).*
- *Dựng mp (α) là mặt phẳng trung trực của một cạnh bên và $I = \Delta \cap$ mp (α). I là tâm mặt cầu.*
- *Tính bán kính R (dựa trên tính chất tứ giác nội tiếp hoặc tam giác đồng dạng).*

Bài 8. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau; OA = a, OB = OC = $a\sqrt{2}$.

1. Tính thể tích khối tứ diện OABC và góc giữa hai mặt phẳng (OBC) và (ABC).
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OB và AC.
3. Xác định tâm I và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.
4. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Chứng minh O, I và G thẳng hàng.

Giải



1.• Ta có : $\left.\begin{matrix} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{matrix}\right\} \Rightarrow OA \perp (OBC)$

$$\text{Vậy } V_{OABC} = \frac{1}{3}OA.S_{\Delta OBC} = \frac{1}{3}OA\left(\frac{1}{2}OB.OC\right)$$

$$= \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{6}a(a\sqrt{2})^2$$

$$= \frac{a^3}{3} \text{ (đvtt)}$$

- Gọi K là trung điểm của BC $\Rightarrow$ OK $\perp$ BC (do ΔOBC cân tại O)

Mà OK là hình chiếu của AK trên (OBC)

$\Rightarrow$ AK $\perp$ BC (định lí ba đường vuông góc)

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (OBC) và (ABC) là góc $(\widehat{OK, AK}) = \widehat{AKO}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ta có : } OK = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{OB\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2a}{2} = a \\ \text{và có } OA = a\end{array}\right\} \Rightarrow OA = OK$$

$\Rightarrow$ ΔOAK vuông cân tại O $\Rightarrow$ $\widehat{AKO} = 45^0$

$\Rightarrow$ $(\widehat{OK, AK}) = 45^0$

hay góc giữa hai mặt phẳng (OBC) và (ABC) bằng 45^0.

2. Ta có : $\begin{cases} OB \perp OA \\ OB \perp OC \end{cases} \Rightarrow OB \perp (OAC)$ tại O

Từ O vẽ OK $\perp$ AC tại K (a)

$$\left.\begin{array}{l}\text{mà } OB \perp (OAC) \\ \text{và : } OK \subset (OAC)\end{array}\right\} \Rightarrow OB \perp OK \text{ tại O} \quad \text{(b)}$$

Từ (a) và (b) suy ra OK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau : OB và AC $\Rightarrow$ d (OB, AC) = OK

Xét ΔOAC vuông tại O, có OK là đường cao ta có :

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2}$$

$$\Rightarrow OK^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vậy d (OB, AC) = $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

3. Ta có K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOBC.

Dựng đường thẳng Δ qua K và $\Delta \perp (OBC) \Rightarrow \Delta$ là trục đường tròn ngoại tiếp ΔOBC

Dựng mp (α) là mặt phẳng trung trực cạnh OA với mp (α) qua H là trung điểm của cạnh OA.

Gọi : $I = mp(\alpha) \cap \Delta \Rightarrow \begin{cases} I \in \Delta \\ I \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IO = IB = IC \\ IO = IA \end{cases}$

$\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện OABC

Theo cách dựng ta có tứ giác HIKO là hình chữ nhật.

Ta có : $R = OI = \sqrt{OK^2 + IK^2} = \sqrt{OK^2 + OH^2}$

$$R = \sqrt{OK^2 + \left(\frac{OA}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{3} + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{11a^2}{12}}$$

$\Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{11}}{\sqrt{12}}$: bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

4. Ta có : $\left.\begin{array}{l} OA \perp (OBC) \\ \Delta \perp (OBC) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta \,//\, OA \Rightarrow$ xác định được mp (Δ; OA)

Trong mp (Δ, OA) gọi $G = AK \cap OI \Rightarrow \left.\begin{array}{l} G \in AK \\ AK \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow G \in (ABC)$

Ta chứng minh G là trọng tâm ΔABC.

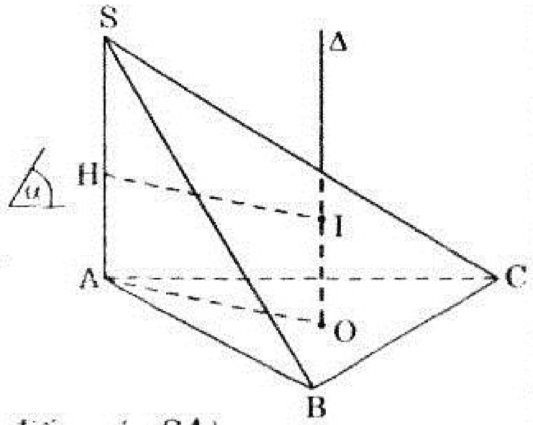
Ta có : G thuộc đường trung tuyến AK của ΔABC (c)

Mặt khác : IK // OA $\Rightarrow \dfrac{AG}{GK} = \dfrac{OA}{IK} = \dfrac{OA}{OH} = \dfrac{OA}{\frac{1}{2}OA} = 2$

$$\Rightarrow AG = 2GK \qquad (d)$$

Từ (c) và (d) ⇒ G là trọng tâm ΔABC.

- ***Nhận xét :*** *Qua bài toán trên, để xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có một cạnh bên vuông góc với mặt đáy, ta thực hiện như sau :*



- *Dựng trục Δ của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.*
- *Dựng mp α là mặt phẳng trung trực của cạnh bên (với cạnh bên SA vuông góc mặt đáy) và I = (α) ∩ Δ*

  ⇒ I là tâm mặt cầu.
- *Tính bán kính R = IA dựa vào tứ giác AHIO là hình chữ nhật (với H là trung điểm của SA).*

Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và vuông góc với đáy.

1. Tính d(A, (SCD)).
2. Xác định tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD và tính thể tích khối cầu đó.

Giải

1. Gọi H là trung điểm của AB

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow SH \perp AB \text{ (do } \Delta SAB \text{ là tam giác đều)}\\ \text{mà : } (SAB) \perp (ABCD)\\ \qquad (SAB) \cap (ABCD) = AB\\ \text{và : } SH \subset (SAB)\end{array}\right\} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ta có } AB \,//\, CD\\ \text{mà } CD \subset (SCD)\end{array}\right\} \Rightarrow AB \,//\, (SCD)$$

Suy ra : d (A, (SCD)) = d (AB, (SCD)) = d (H, (SCD))

$$\left.\begin{array}{l}\text{Gọi K là trung điểm của CD} \Rightarrow CD \perp HK\\ \qquad\qquad \text{và có } CD \perp SH \text{ (do } SH \perp (ABCD))\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow CD \perp (SHK)\\ \text{mà } CD \subset (SCD)\end{array}\right\} \Rightarrow (SHK) \perp (SCD) \text{ và } (SHK) \cap (SCD) = SK\\ \qquad\qquad\qquad \text{Từ H vẽ } HL \perp SK \text{ tại L}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow HL \perp (SCD)$ tại L $\quad \Rightarrow d(H, (SCD)) = HL$

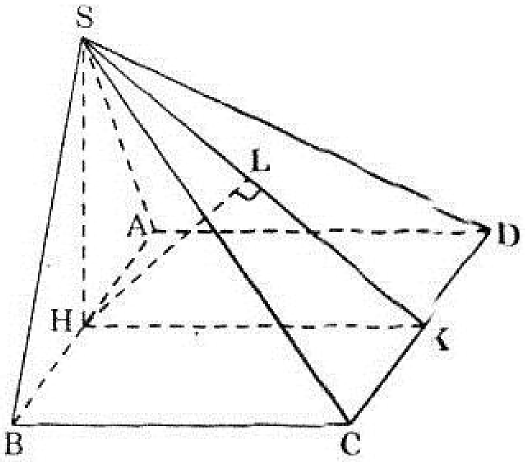
Xét ΔSHK vuông tại H, có HL là đường cao

$$\Rightarrow \frac{1}{HL^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2}$$

$$= \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2}$$

$$\Rightarrow HL^2 = \frac{3a^2}{7} \Rightarrow HL = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Vậy $d(A, (SCD)) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



2.• Gọi I là tâm hình vuông ABCD và G là trọng tâm ΔSAB (với G ∈ SH)

Ta có : IH ⊥ AB (do tính chất hình vuông)

mà (SAB) ⊥ (ABCD)

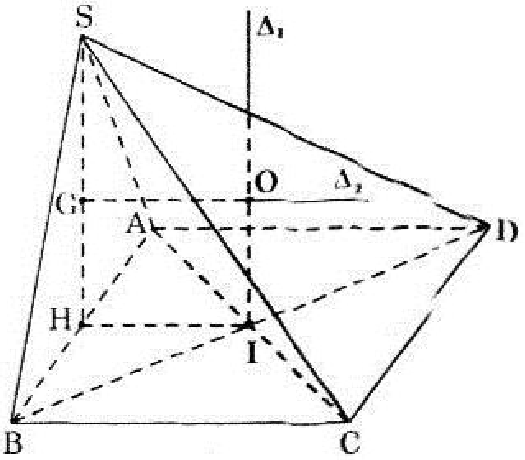
(SAB) ∩ (ABCD) = AB

IH ⊂ (ABCD)

Suy ra : IH ⊥ (SAB)

Dựng trục (Δ_1) của đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD (với Δ_1 qua I).

Dựng trục (Δ_2) của đường tròn ngoại tiếp ΔSAB (với Δ_2 qua G).



$\Rightarrow (\Delta_1)$ và (Δ_2) đều nằm trên mặt phẳng trung trực của AB.

$\Rightarrow (\Delta_1) \cap (\Delta_2)$ tại O

$$\Rightarrow \begin{cases} O \in \Delta_1 \\ O \in \Delta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = OB = OC = OD \\ OA = OB = OS \end{cases}$$

$\Rightarrow$ O cách đều các đỉnh của hình chóp S.ABCD.

$\Rightarrow$ O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

- Xét ΔOGS vuông tại G, ta có :

$$OS = \sqrt{SG^2 + OG^2} = \sqrt{SG^2 + HI^2}$$

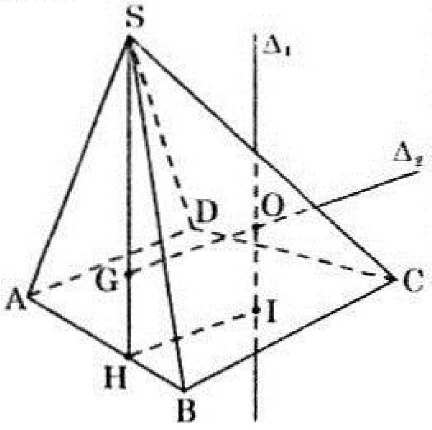
mà $SG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $HI = \dfrac{a}{2} \Rightarrow OS = \sqrt{\dfrac{3a^2}{9} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$

Vậy bán kính mặt cầu là $R = OS = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$

$\Rightarrow$ Thể tích khối cầu đó là :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi.\frac{a^3.21\sqrt{21}}{216} = \frac{7\pi a^3\sqrt{21}}{54} \text{ (đvtt).}$$

- ***Nhận xét :*** *Qua bài toán trên, để xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có một mặt bên vuông góc với mặt đáy (giả sử là (SAB) ⊥ (ABCD)), ta thực hiện như sau :*



- *Dựng trục Δ_1 của đường tròn nội tiếp ΔSAB*

  Dựng trục Δ_2 của đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD.
- *Ta có Δ_1 và Δ_2 cùng thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.*

  $\Rightarrow \Delta_1 \cap \Delta_2 = O$, O là tâm mặt cầu ngoại tiếp.
- *Trong cách dựng ta có ΔSGO vuông tại G.*

  Và : R = OS.

Bài 10. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác cân, AB = AC = a, (ABC) ⊥ (SBC) và SA = SB = a.

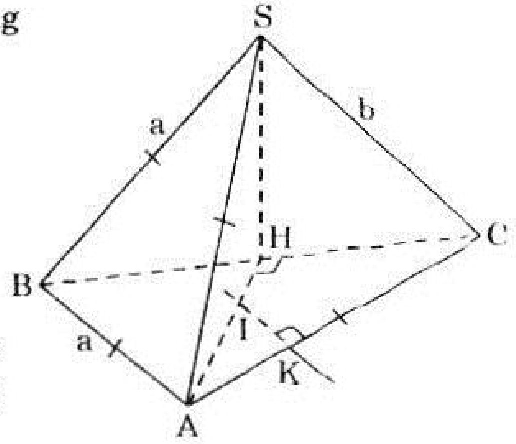
1. Chứng minh rằng ΔSBC là tam giác vuông tại S.
2. Xác định tâm và thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp SABC biết SC = b.

Giải

1. Gọi H là trung điểm của cạnh BC $\Rightarrow$ AH $\perp$ BC (do ΔABC cân tại A) mà (ABC) $\perp$ (SBC) và (ABC) $\cap$ (SBC) = BC; AH $\subset$ (ABC)

$$\left.\begin{array}{l}\text{AH} \perp \text{(ABC)} \\ \text{mà (ABC)} \perp \text{(SBC)} \\ \text{và (ABC)} \cap \text{(SBC)} = \text{BC; AH} \subset \text{(ABC)}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \text{ AH} \perp \text{(SBC)} \\ \text{mà SH} \subset \text{(SBC)}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{AH} \perp \text{SH} \quad \Rightarrow \Delta\text{SHA vuông tại H.}$$



Xét hai tam giác : ΔSHA và ΔBHA vuông tại H có : AH cạnh chung, SA = AB

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \Delta\text{SHA} = \Delta\text{BHA} \Rightarrow \text{SH} = \text{BH} = \dfrac{\text{BC}}{2} \\ \text{mà SH là trung tuyến của } \Delta\text{SBC}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ ΔSBC vuông tại S.

2. • Ta có AB = AS = AC = a $\Rightarrow$ A thuộc trục đường tròn ngoại tiếp ΔSBC mà ΔSBC có tâm đường tròn ngoại tiếp là H.

$\Rightarrow$ AH là trục đường tròn ngoại tiếp ΔSBC.

Dựng mp (α) là mặt phẳng trung trực cạnh AC (với (α) qua trung điểm K của AC).

$$\text{Và } (\alpha) \cap \text{AH} = \text{I} \quad \Rightarrow \begin{cases}\text{IB} = \text{IC} = \text{IC} \\ \text{IA} = \text{IC}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

• Ta có : ΔSBC vuông tại S $\quad \Rightarrow \text{BC} = \sqrt{\text{SB}^2 + \text{SC}^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

mà SH là trung tuyến của ΔSBC $\quad \Rightarrow \text{SH} = \dfrac{\text{BC}}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

ΔSHA vuông tại H (cmt) $\quad \Rightarrow \text{AH} = \sqrt{\text{SA}^2 - \text{SH}^2}$

$$\Rightarrow \text{AH} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 + b^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2 - b^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2 - b^2}}{2}$$

Ta có tứ giác IHCK là tứ giác nội tiếp nên có :

$$\text{AI.AH} = \text{AK.AC} \quad \Rightarrow \text{AI} = \frac{\text{AC}^2}{2\text{AH}} = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - b^2}}$$

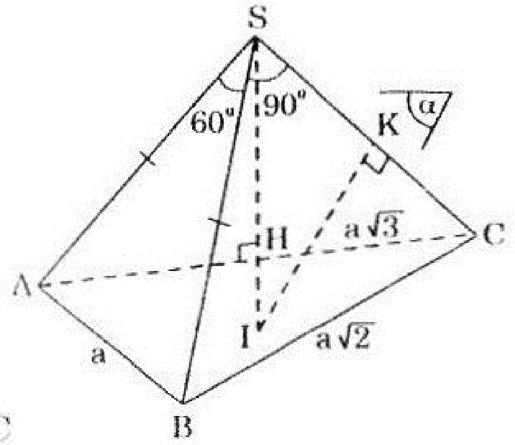
Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là : $R = \dfrac{a^2}{\sqrt{3a^2 - b^2}}$

Suy ra thể tích khối cầu là :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - b^2}}\right)^3 = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{a^6}{(3a^2 - b^2)\sqrt{3a^2 - b^2}}.$$

Bài 11. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = a và góc $\widehat{ASB} = 60^0$; $\widehat{BSC} = 90^0$; $\widehat{CSA} = 120^0$.

Giải



Ta có : $\widehat{ASB} = 60^0$ và SA = SB

$\Rightarrow \Delta SAB$ là tam giác đều $\Rightarrow AB = a$

Và có : $\widehat{BSC} = 90^0$ và SB = SC

$\Rightarrow \Delta SBC$ vuông cân tại S

$\Rightarrow BC = SB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Xét ΔASC ta có :

$$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA.SC.\cos\widehat{ASC}$$
$$= 2a^2 - 2a^2\cos 120^0 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$$

Nhận xét : $AB^2 + BC^2 = 3a^2 = AC^2$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại B}\\ \text{Gọi H là trung điểm AC}\end{array}\right\} \Rightarrow$ H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

mà : SA = SB = SC = a $\Rightarrow$ SH là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Dựng mp (α) là mặt phẳng trung trực cạnh SC với mp (α) qua trung điểm K của SC và mp $(\alpha) \cap SH = I$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in mp\,(\alpha) \\ I \in SH \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC \\ IS = IC \end{cases}$$

$\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC

Xét ΔSHC vuông tại H nên có :

$$SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

Ta có tứ giác IKCH là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow SI.SH = SK.SC \quad \Rightarrow SI = \frac{SC^2}{2SH} = \frac{a^2}{2.\frac{a}{2}} = a$$

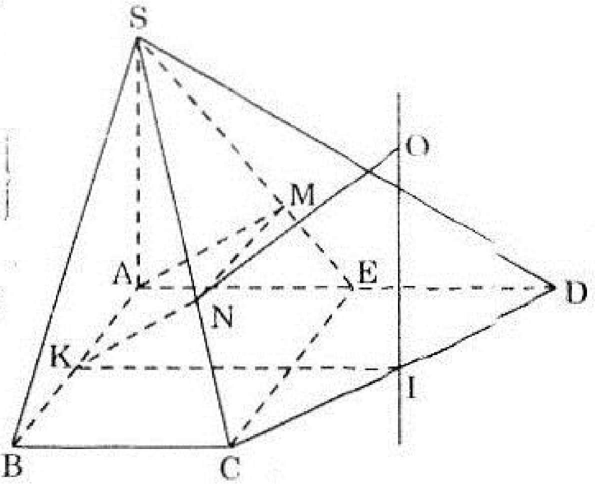
Vậy bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là R = a.

Bài 12. Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥ (ABCD) và SA = a, đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B và có : AB = BC = a, AD = 2a.

Gọi E là trung điểm của cạnh AD.

1. Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SAD) và (SCE).
2. Xác định tâm và tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp S.CDE.

Giải



1. Ta chứng minh được tứ giác ABCE là hình vuông

$\Rightarrow CE \perp AE$

và có : $CE \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$)

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow CE \perp (SAD) \\ \text{mà } CE \subset (SCE)\end{array}\right\} \Rightarrow (SCE) \perp (SAD)$$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SCE) và (SAD) là một vuông.

2.• Gọi I là trung điểm của CD

$\Rightarrow$ I tâm đường tròn nội tiếp ΔCED.

Qua I dựng Δ là trục đường tròn của ΔCED.

Gọi M, N là trung điểm của SE và SC.

$\Rightarrow MN \parallel CE$ mà $CE \parallel AB \Rightarrow AB \parallel MN$

$\Rightarrow$ AB và MN xác định được mặt phẳng (ABNM).

Ta có AM là trung tuyến của tam giác vuông SAE $\Rightarrow SE \perp AM$ (a)

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Ta lại có : } AB \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \\ \qquad AB \perp AD\end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (SAD) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{mà } SE \subset (SAD)\end{array}\right\} \Rightarrow SE \perp AB \text{ (b)}$$

Từ (a) và (b) $\Rightarrow SE \perp (ABNM)$ tại trung điểm M của đoạn SE.

$\Rightarrow$ mp (ABNM) là mặt phẳng trung trực của SE.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Gọi K là trung điểm AB } \Rightarrow AK = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2} \\ \text{và có } MN = \dfrac{CE}{2} = \dfrac{a}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow AK = MN \\ \text{và có } AK \parallel MN \text{ (do cùng song song CE)}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ AKNM là hình bình hành

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow KN \parallel AM, \text{ mà } AM \subset (SAE) \Rightarrow KN \parallel (SAE) \\ \text{lại có : } IK \parallel (SAE) \quad (\text{vì } IK \parallel AE,\ AE \subset (SAE))\end{array}\right\} \Rightarrow (NIK) \parallel (SAE)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dễ thấy } (\Delta; IK) \parallel (SAE) \\ \quad \text{mà } I \in (NIK) \cap (\Delta; IK)\end{array}\right\} \Rightarrow (\Delta, IK) \equiv (SAE)$$

$\Rightarrow$ KN và Δ đồng phẳng $\Rightarrow \Delta \cap KN = O$

$$\Rightarrow \begin{cases} O \in \Delta \\ O \in KM \subset (ABNM) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OC = OE = OD \\ OS = OE \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.CDE.**

- Ta có : $\widehat{NKI} = \widehat{MAE} = 45^0 \Rightarrow \Delta KOI$ vuông cân tại I

$$\Rightarrow OI = IK = \frac{AD + BC}{2} = \frac{2a + a}{2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow OC^2 = OI^2 + IC^2$$

Vì : ABCE là hình vuông $\Rightarrow \Delta CED$ vuông cân tại E

$$\Rightarrow CD = CE\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow CI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $$OC^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{9a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} = \frac{11a^2}{4}.$$

$$\Rightarrow OC = \frac{a\sqrt{11}}{2}$$ = R bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.CDE

Vậy thể tích khối cầu là :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{a\sqrt{11}}{2}\right)^3 = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{a^3.11\sqrt{11}}{8} = \frac{11\pi a^3\sqrt{11}}{6} \text{ (đvtt).}$$

TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 13. Cho tứ diện S.ABC có cạnh SA $\perp$ (ABC) và SA = a, AB = b, AC = c. Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.ABC trong các trường hợp sau :

1. $\widehat{BAC} = 90^0$
2. $\widehat{BAC} = 60^0$ và b = c.
3. $\widehat{BAC} = 120^0$ và b = c.

Đáp số : 1. $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

2. $R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{3}}$ 3. $R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$.

Bài 14. Cho hình tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a và có đường cao AH. Gọi O là trung điểm của AH. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OBCD.

Đáp số : $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Bài 15. Cho tứ diện S.ABC có $SA \perp (ABC)$ và ΔABC vuông cân có cạnh huyền $AB = 2a$. Mp (SBC) tạo với mp (ABC) một góc bằng 60^0.

1. Xác định tâm và mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.ABC.
2. Tính thể tích khối cầu tương ứng với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.ABC.

Bài 16. Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Xét các hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt đáy và có S, A cố định, SA = h cho trước, đáy ABCD là một tứ giác tùy ý nội tiếp trong đường tròn đã cho mà hai đường chéo AC và BD vuông góc nhau.

1. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.
2. Xác định hình, tính tứ giác ABCD để thể tích khối chóp S.ABCD đạt giá trị lớn nhất.

Đáp số : 1. $R = \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4}}$

2. $(V_{S.ABCD})_{Max}$ khi ABCD là hình vuông.

Bài 17. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật với AB = a, AD = 2a. Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong một mặt phẳng vuông góc với mp (ABCD). Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Đáp số : $R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Bài 18. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^0$, góc giữa mp (SBC) và mặt đáy bằng 60^0, SA = SB = SD.

1. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.
2. Tính d(C, (SBD)).
3. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.BCD.

Đáp số : 1. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ 2. $d = \frac{3a\sqrt{13}}{13}$

3. Tâm I là trung điểm SC và có $R = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Dạng 3. Giao của mặt cầu và mặt phẳng
Giao của mặt cầu và đường thẳng

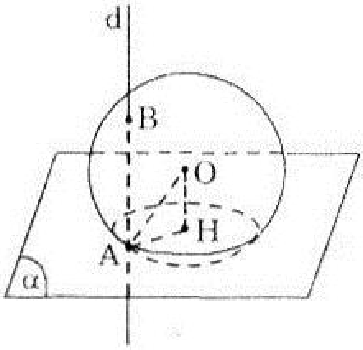
Bài 19. Cho hình cầu tâm O bán kính R. A là điểm trên mặt cầu và (α) là mặt phẳng qua A sao cho OA tạo với (α) một góc 30^0.

1. Tính diện tích thiết diện tạo bởi (α) và hình cầu.

2. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mp (α) cắt mặt cầu tại B. Tính độ dài đoạn AB.

Giải

1. Ta có : $\begin{cases} A \in mp\ (\alpha) \\ A \text{ thuộc mặt cầu} \end{cases}$



$\Rightarrow$ (α) tiếp xúc mặt cầu hoặc (α) cắt mặt cầu.

Vì OA tạo với (α) một góc 60^0

$\Rightarrow$ α cắt mặt cầu theo một đường tròn (C) có tâm là H.

Với H là hình chiếu của O trên mp (α).

Ta có : AH là hình chiếu của OA trên mp (α)

$\Rightarrow (\widehat{OA, mp\ (\alpha)}) = (\widehat{OA, AH}) = \widehat{OAH} = 30^0$

Xét ΔOAH vuông tại H, ta có :

$$\cos 30^0 = \frac{AH}{OA} \Rightarrow AH = OA.\cos 30^0 \Rightarrow AH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow$ Bán kính đường tròn (C) bằng $r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ Diện tích hình tròn (C) là : $S = \pi r^2 = \pi\left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{3\pi R^2}{4}$ (đvdt).

2. Ta có : $\left.\begin{matrix} d \perp (\alpha) \\ OH \perp (\alpha) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \,//\, OH$

$\Rightarrow$ Bốn điểm A, B, O và H cùng thuộc một mặt phẳng.

$$\left.\begin{matrix} \text{Vì } d \perp (\alpha) \\ AH \subset (\alpha) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \perp AH \Rightarrow \left.\begin{matrix} \widehat{BAH} = 1v \\ \text{mà } \widehat{OAH} = 30^0 \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow \widehat{BAO} = 90^0 - 30^0 = 60^0 \\ \text{mà : } OA = OB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta OAB \text{ là tam giác đều } \Rightarrow AB = OA = R.$$

Bài 20. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AA' = a, AB = b, AD = c.

1. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình hộp đó.
2. Tính bán kính đường tròn là giao tuyến của mp (ABCD) và mặt cầu trên.

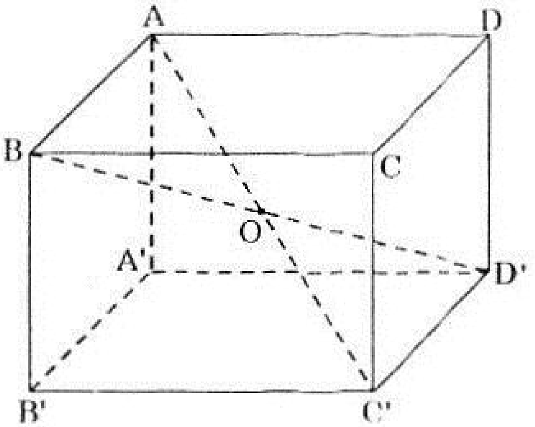
Giải

1. Gọi O là giao điểm các đường chéo của hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'

$\Rightarrow OA = OB = OC = OD = OA' = OB' = OC' = OD'$

$\Rightarrow$ O là tâm mặt cầu qua tám đỉnh của hình hộp đó.

Và ta có bán kính mặt cầu là :



$$R = OA = \frac{AC'}{2}$$

mà $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

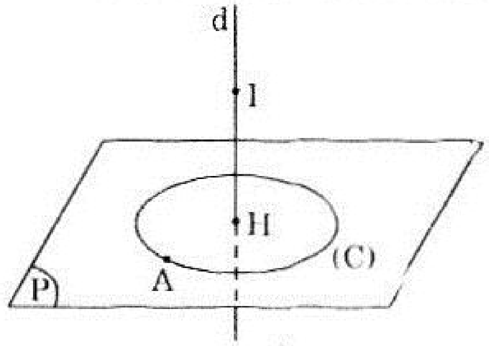
2. Giao tuyến của mp (ABCD) với mặt cầu là đường tròn (C) ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD

$\Rightarrow$ tâm đường tròn (C) là : $I = AC \cap BD$.

Và bán kính của (C) là : $r = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{AD^2 + DC^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{c^2 + b^2}}{2}$.

Bài 21. Cho đường thẳng d và điểm A không nằm trên d. Xét các mặt cầu đi qua A và có tâm nằm trên đường thẳng d. Chứng minh rằng các mặt cầu đó luôn đi qua một đường tròn cố định.

Giải



Gọi (S) là một mặt cầu có tâm là I

Với $\begin{cases} I \in d \\ (S) \text{ qua } A \end{cases}$

Từ A vẽ mp (P) sao cho $(P) \perp d$

và gọi $H = d \cap (P) \Rightarrow$ (P) cố định

Vì : A thuộc (P) và $A \in (S)$ và IA không vuông góc mp (P)

$\Rightarrow$ (P) cắt (S) theo một đường tròn (C).

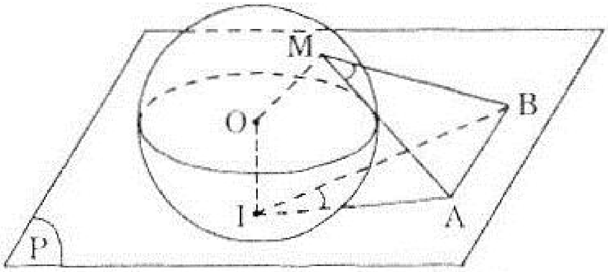
Với $\begin{cases} A \in (C) \\ \text{Tâm của (C) là H (do H là hình chiếu của I (trên (P))} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{(C) có tâm H cố định} \\ \text{bán kính } r = AH \text{ : không đổi} \end{cases} \Rightarrow$ (C) cố định.

Vậy (S) luôn qua một đường tròn cố định (C).

Bài 22. Cho mặt cầu S(O; R) tiếp xúc với mp (P) tại I. Gọi M là điểm nằm trên mặt cầu nhưng không phải là điểm đối xứng của điểm I qua tâm. Từ M ta vẽ hai tiếp tuyến của mặt cầu, hai tiếp tuyến đó cắt (P) tại A và B. Chứng minh rằng : $\widehat{AMB} = \widehat{AIB}$.

Giải



Ta có : (P) tiếp xúc S(O; R) tại I $\Rightarrow$ OI $\perp$ (P)
mà IA; IB $\subset$ (P)

$\Rightarrow \begin{cases} OI \perp IA \text{ tại } I \\ OI \perp IB \text{ tại } I \end{cases} \Rightarrow$ IA và IB là 2 tiếp tuyến của S(O; R) tại I.

$\Rightarrow$ Từ B có BM và BI là 2 tiếp tuyến với S(O; R)

$\Rightarrow$ BM = BI

Chứng minh tương tự AM = AI

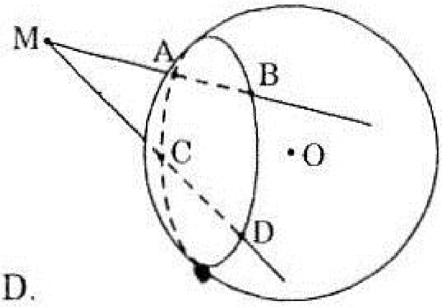
$\Rightarrow \Delta IAB = \Delta MAB$ (do có thêm AB là cạnh chung)

$\Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{AMB}$.

Bài 23. Từ một điểm M nằm ngoài mặt cầu S(O; R) ta kẻ hai đường thẳng cắt S(O; R) lần lượt tại A, B và C, D.

1. Chứng minh rằng : MA.MB = MC.MD
2. Gọi MO = d. Tính MA.MB theo R và d.

Giải



1. Ta có AB và CD đồng quy tại M.

   $\Rightarrow$ Xác định được mp (ABCD).

   $\Rightarrow$ mp (ABCD) $\cap$ S(O; R) = ($\mathscr{C}$)

   Với ($\mathscr{C}$) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD.

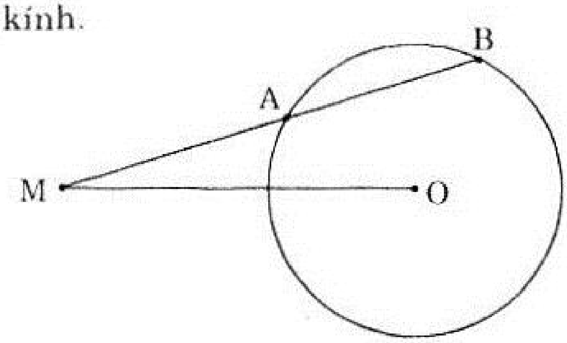
   Trong mp (ABCD) có MAB, MCD là hai cát tuyến vẽ từ M, nên ta có :

   $$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD} \Rightarrow MA.MB = MC.MD.$$

2. Mp (OAB) cắt mặt cầu là mặt phẳng kính.

   $\Rightarrow$ mp (OAB) cắt mặt cầu S(O; R) theo một đường tròn lớn (C) có tâm là O và bán kính là R.

   Xét trong mp (OAB), ta có MAB là một cát tuyến vẽ từ điểm M nằm ngoài đường tròn (C)



$$\Rightarrow \overline{MA}.\overline{MB} = MO^2 - R^2 = d^2 - R^2$$

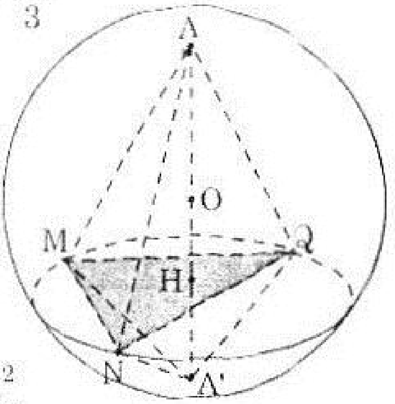
$$\Rightarrow MA.MB = d^2 - R^2 \quad \text{(vì } d > R\text{)}.$$

Bài 24. Cho hình cầu (S) đường kính AA' = 2R. Gọi H là điểm trên đoạn AA' sao cho $AH = \frac{4R}{3}$. Mặt phẳng (P) qua H và vuông góc với AA' cắt (S) theo một đường tròn (C).

1. Tính diện tích hình tròn (C).
2. Gọi MNQ là tam giác đều nội tiếp trong đường tròn C. Hãy tính thể tích khối đa diện AMNQA' theo R.

Giải

1. • Gọi O là tâm mặt cầu : Vì $AH = \frac{4R}{3} \Rightarrow OH = \frac{R}{3}$



• Gọi r là bán kính đường tròn (C)

$$\Rightarrow r^2 = R^2 - OH^2 = R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2 = \frac{8R^2}{9}$$

$$\Rightarrow r = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$$

Suy ra diện tích hình tròn (C) là $S = \pi r^2 = \frac{\pi 8R^2}{9}$.

2. Vì ΔMNQ là tam giác đều $\Rightarrow MN = r\sqrt{3} = \frac{2R\sqrt{2}}{3}.\sqrt{3} = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$

Ta có : $V_{AMNQA'} = V_{AMNQ} + V_{A'MNQ} = \frac{1}{3}AH.S_{\Delta MNP} + \frac{1}{3}A'H.S_{\Delta MNP}$

$$= \frac{1}{3}(AH + A'H)S_{\Delta MNP} = \frac{1}{3}AA'.S_{\Delta MNP}$$

$$= \frac{1}{3}2R.\frac{MN^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2R\sqrt{3}}{3.4}.\left(\frac{2R\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{4R^3\sqrt{3}}{9}.$$

TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 25. Cho mặt cầu S(O; R) tiếp xúc mp (P) tại T. Lấy điểm A trên (P), cho biết OA tạo với mp (P) một góc là φ.

Tính AT và AO theo R và φ.

Bài 26. Giả sử mặt cầu (S) tiếp xúc với sáu cạnh của tứ diện ABCD.

Chứng minh rằng : AB + CD = AC + BD = AD + BC.

Dạng 4. Tập hợp tâm của mặt cầu

Ta vận dụng các quỹ tích cơ bản trong không gian như sau :

- *Tập hợp các điểm M thay đổi trong không gian cách đều hai điểm cố định A và B là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.*
- *Tập hợp các điểm M thay đổi trong không gian cách đều ba điểm A, B, C không thẳng hàng là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

Bài 27. Tìm tập hợp tâm I của mặt cầu (S), biết :

1. (S) qua hai điểm phân biệt A, B cho trước.
2. (S) qua ba điểm phân biệt A, B, C cho trước.

Giải

1. (S) qua hai điểm phân biệt A, B cho trước

$\Leftrightarrow$ IA = IB $\Leftrightarrow$ I thuộc mặt phẳng trung trực (P) của đoạn AB.

Vậy tập hợp điểm I là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

2. (S) qua 3 điểm phân biệt A, B, C cho trước

$\Leftrightarrow$ IA = IB = IC (*)

Vì vậy :

(i) Nếu A, B, C thẳng hàng thì tập hợp tâm I là tập rỗng.

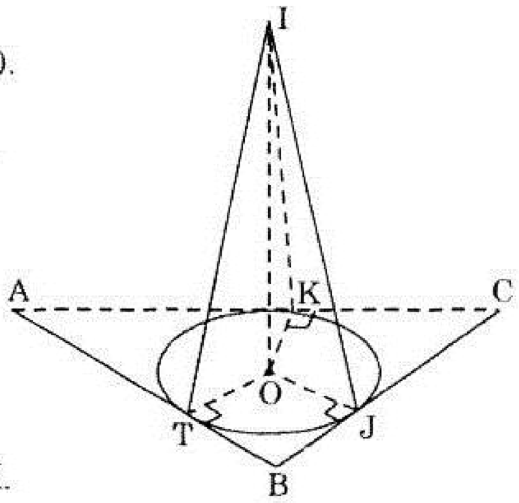
(ii) Nếu A, B, C không thẳng hàng :

(*) $\Leftrightarrow$ I thuộc trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Lúc đó tập hợp I là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài 28. Tìm tập hợp tâm I của mặt cầu (S) tiếp xúc với ba cạnh của ΔABC.

Giải



Gọi O là hình chiếu của I trên mp (ABC).

Mặt cầu (S) tiếp xúc 3 cạnh AB, BC và CA lần lượt tại T, J và K

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IT \perp AB;\ IJ \perp BC;\ IK \perp AC \\ IT = IJ = IK \end{cases}$$

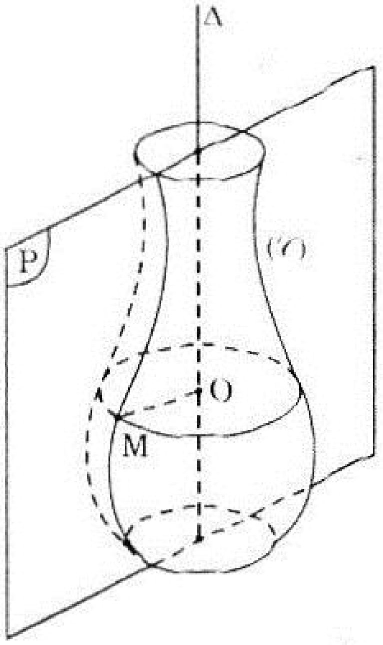
$$\Leftrightarrow \begin{cases} OT \perp AB;\ OJ \perp BC;\ OK \perp AC \\ OT = OJ = OK \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔTJK.

Vậy : Tập hợp I là trục đường tròn ngoại tiếp ΔTJK (do IO ⊥ (TJK) tại O).

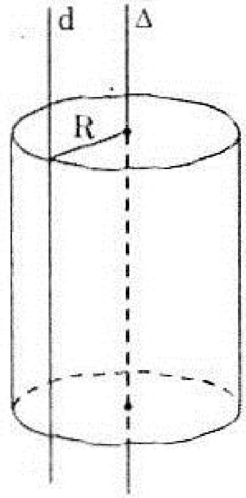
CHỦ ĐỀ 24. Khái niệm mặt tròn xoay

> *Trong không gian cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ và đường $(\mathscr{C})$. Khi quay mp (P) quanh Δ một góc 360^0 thì mỗi điểm M trên $(\mathscr{C})$ vạch ra một đường tròn có tâm O thuộc Δ và nằm trên mặt phẳng vuông góc Δ. Như vậy khi quay mp (P) quanh đường thẳng Δ thì đường $(\mathscr{C})$ sẽ tạo nên một hình, được gọi là mặt tròn xoay.*
>
> *$(\mathscr{C})$: đường sinh của mặt tròn xoay.*
>
> *Δ : trục của mặt tròn xoay.*



A. MẶT TRỤ – HÌNH TRỤ – KHỐI TRỤ

1. Định nghĩa *(mặt trụ)*



* *Cho hai đường thẳng d và Δ song song nhau, cách nhau bằng một khoảng cách R.*

Mặt tròn xoay được tạo thành khi quay đường thẳng d quanh trục Δ một góc 360^0 được gọi là mặt trụ tròn xoay (hay mặt trụ).

Δ : là trục mặt trụ.

d : là đường sinh của mặt trụ.

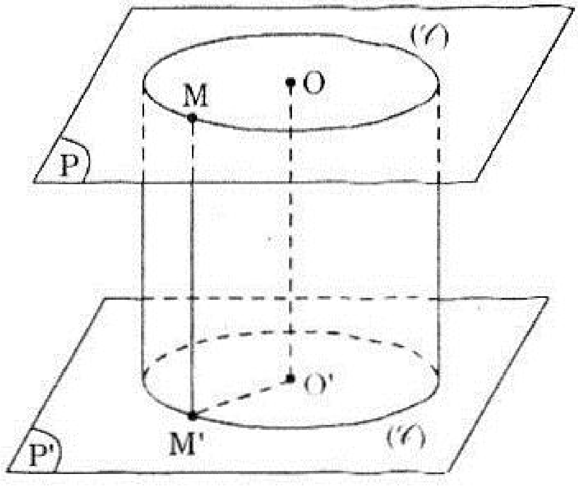
R : bán kính mặt trụ.

* ***Kết quả :*** *Mặt trụ tròn xoay là tập hợp các điểm trong không gian cách đường thẳng Δ cố định một khoảng cách không đổi $R > 0$ (R : là bán kính mặt trụ).*

2. Định nghĩa *(hình trụ – khối trụ)*

* *Cắt mặt trụ (T) trục Δ, bán kính R bởi hai mặt phẳng phân biệt (P) và (P') cùng vuông góc với Δ, ta được giao tuyến là hai đường tròn $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$.*

– *Phần mặt trụ (T) nằm giữa hai mặt phẳng (P) và (P') cùng hai hình tròn xác định bởi $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$ được gọi là hình trụ.*



- *$(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$ là hai đường tròn đáy, hai hình tròn xác định bởi $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$ gọi là hai mặt đáy của hình trụ, bán kính của chúng bằng R; khoảng cách giữa hai mặt đáy gọi là chiều cao của hình trụ.*
- *Gọi O và O' là tâm của hai đường tròn đáy thì đường thẳng OO' (nằm trên Δ) gọi là trục của hình trụ.*
- *Phần nằm giữa hai mặt đáy gọi là mặt xung quanh của hình trụ.*
- *Với mỗi điểm $M \in (\mathscr{C})$, có một điểm $M' \in (\mathscr{C}')$ sao cho MM' // OO'. Ta có MM' nằm trên mặt xung quanh của hình trụ, có độ dài bằng chiều cao của hình trụ. Các đoạn thẳng như thế gọi là đường sinh của hình trụ.*

* *Hình trụ cùng với phần bên trong của nó được gọi là khối trụ.*

3. Diện tích hình trụ và thể tích khối trụ

Diện tích xung quanh hình trụ : $S_{xq} = 2\pi Rh$

Thể tích khối trụ : $V = \pi R^2 h$

(Với R : bán kính đáy, h : chiều cao hình trụ).

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng d (hay điểm M) nằm trên mặt trụ

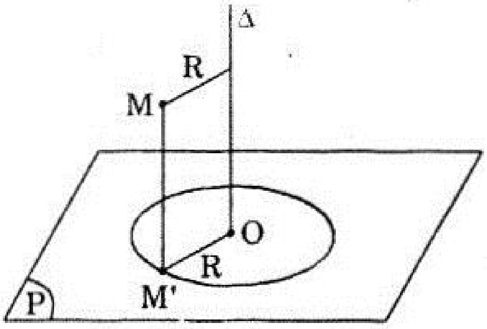
Ta thực hiện các bước sau :

1. *Chứng minh đường thẳng d song song và cách đường thẳng cố định Δ bằng một khoảng cách không đổi bằng R.*

   (Điểm M cách đường thẳng cố định Δ bằng một khoảng cách không đổi bằng R).
2. *Kết luận d (hay điểm M) thuộc mặt trụ có trục là Δ và bán kính là R.*

Bài 1. Cho đường tròn C (O; R) nằm trong mp (P). Tìm tập hợp điểm M trong không gian sao cho hình chiếu của chúng trên (P) luôn nằm trên đường tròn đã cho.

Giải



Gọi Δ là trục của C (O; R) và M' là hình chiếu của M trên mặt phẳng (P).

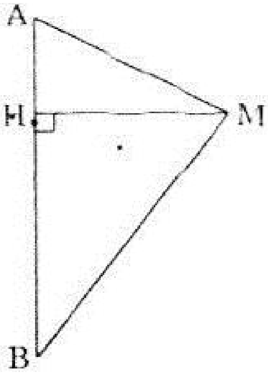
Và do : M' ∈ C (O; R)

⇒ MM' // d và d (M; Δ) = OM' = R

⇒ Tập hợp điểm M là mặt trụ có trục Δ và bán kính của mặt trụ là R.

Bài 2. Trong không gian cho hai điểm A, B cố định. Gọi M là điểm lưu động trong không gian sao cho ΔMAB có diện tích là S không đổi. Chứng minh M nằm trên một mặt trụ.

Giải



Vẽ MH ⊥ AB tại H.

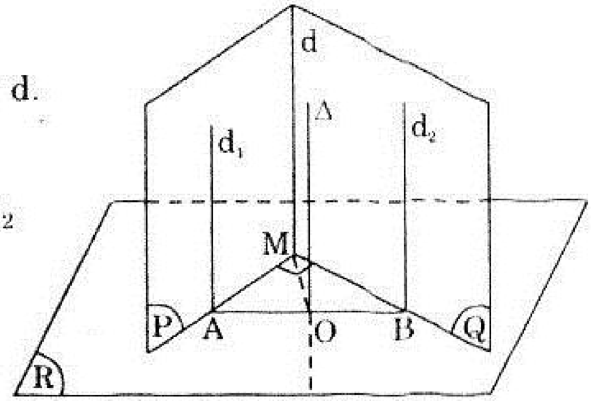
$\Rightarrow S_{\Delta MAB} = S = \dfrac{1}{2}AB.MH$

$\Rightarrow MH = \dfrac{2S}{AB}$: không đổi

⇒ M cách đường thẳng AB một khoảng cách không đổi $\dfrac{2S}{AB}$, nên M nằm trên mặt tròn xoay có trục là AB và bán kính $R = \dfrac{2S}{AB}$.

Bài 3. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 cố định, $d_1 // d_2$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng di động lần lượt qua d_1 và d_2 và (P) ⊥ (Q) theo giao tuyến d. Chứng minh rằng d nằm trên một mặt trụ.

Giải



$$\left.\begin{array}{l} \text{Vì}: d_1 // d_2 \\ \text{mà } d_1 \subset (P);\, d_2 \subset (Q) \\ \text{và } (P) \cap (Q) = d \end{array}\right\} \Rightarrow d_1 // d_2 // d.$$

Gọi R là mặt phẳng vuông góc d_1, d_2 và d lần lượt tại A, B, M

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow d \perp AM \\ \quad d \perp BM \\ \text{mà } d = (P) \cap (Q) \end{array}\right\}$$

Suy ra góc hai mặt phẳng (P) và (Q) là góc $\widehat{(AM, BM)} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^0$

Đặt AB = 2R và gọi O là trung điểm của AB.

$\Rightarrow MO = \dfrac{AB}{2} = R$ (O : cố định)

Từ O vẽ đường thẳng Δ vuông góc mp (R) tại O ⇒ Δ cố định

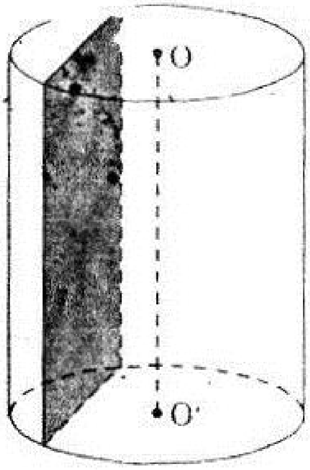
$$\left.\begin{array}{r} \text{Ta có } \Delta \perp R \\ d \perp R \end{array}\right\} \Rightarrow d // \Delta \text{ và } d\,(d; \Delta) = MO = R$$

Vậy d nằm trên mặt trụ có trục là Δ và bán kính là R.

TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 4. Chứng minh các tiếp tuyến của mặt cầu S(O; R) song song với đường thẳng d cố định luôn nằm trên một mặt trụ xác định.

Dạng 2. Thiết diện – Diện tích xung quanh – Thể tích khối trụ

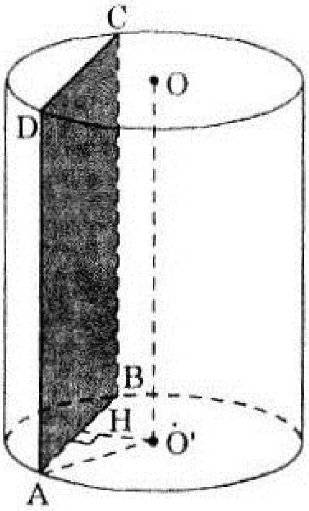


Thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng song song với trục của hình trụ là một hình chữ nhật.

Bài 5. Cho hình trụ có bán kính đáy R = 4cm và khoảng cách hai đáy bằng 8cm.

1. Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích khối trụ được tạo nên.
2. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng (P) song song với trục của hình trụ và cách trục 2cm. Hãy tính diện tích thiết diện tạo nên.

Giải



1. Ta có diện tích xung quanh hình trụ :

$$S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi 4.8 = 64\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Thể tích khối trụ :

$$V = B.h = \pi R^2.h = \pi.4^2.8 = 128\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

2. Mặt phẳng (P) hình trụ theo hai đường sinh AD, BC.

$\Rightarrow$ Thiết diện của khối trụ định bởi mp (P) là hình chữ nhật ABCD.

Gọi H là trung điểm AB.

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow O'H \perp AB\\ \text{Và có : } O'H \perp AD\end{array}\right\} \Rightarrow O'H \perp (ABCD) \text{ tại H.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow O'H = d\ (O', (P))\\ \text{Ta lại có } OO' \parallel (P)\end{array}\right\} \Rightarrow d\ (OO', (P)) = d\ (O', (P)) = O'H$$

$\Rightarrow O'H = 2$cm.

Xét $\Delta O'AH$ vuông tại H, ta có :

$$AH = \sqrt{O'A^2 - O'H^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}\text{ cm}$$

$$\Rightarrow AB = 2AH = 4\sqrt{3}\text{ (cm)}.$$

Vậy diện tích thiết diện là :

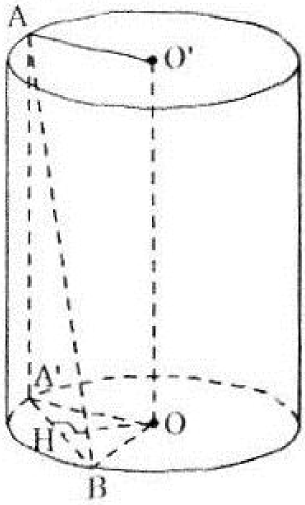
$$S_{ABCD} = AD.AB = 8.4\sqrt{3} = 32\sqrt{3}\text{ (cm}^2\text{)}.$$

Bài 6. Cho hình trụ có bán kính là R và chiều cao $h = R\sqrt{3}$.

1. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.
2. Cho hai điểm A và B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa hai đường thẳng AB và trục hình trụ bằng 30^0. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục hình trụ.

(*Ghi chú* : diện tích toàn phần của hình trụ là tổng của diện tích xung quanh và diện tích hai đáy).

Giải



1.• Diện tích xung quanh của hình trụ :

$$S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi R(R\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}\pi R^2$$

• Diện tích toàn phần của hình trụ :

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\sqrt{3}\pi R^2 + 2\pi R^2$$

$$= 2(\sqrt{3}+1)R^2\pi.$$

2. Gọi AA' là đường sinh của hình trụ

$\Rightarrow O'A = R$ và $AA' = h = R\sqrt{3}$

Ta có AA' // OO' $\Rightarrow (\widehat{AB, OO'}) = (\widehat{AB, AA'}) = \widehat{BAA'} = 30^0$

$$\text{Ta có : } \left.\begin{array}{l} OO' \parallel AA' \\ \text{mà } AA' \subset (BAA') \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} OO' \parallel (BAA') \\ \text{mà } AB \subset (BAA') \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow d(OO', AB) = d(OO', (ABA')) = d(O; (ABA'))$

Gọi H là trung điểm của A'B $\Rightarrow OH \perp A'B$ (do $\Delta OA'B$ cân tại O)

và có $OH \perp AA'$

$\Rightarrow OH \perp (AA'B)$ tại H

$\Rightarrow OH = d(O; (ABA'))$

Xét $\Delta AA'B$ vuông tại A' ta có :

$$\tan 30^0 = \frac{A'B}{AA'} \Rightarrow A'B = AA'\tan 30^0 = R\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{3} = R$$

$$\Rightarrow A'B = OA' = OB = R$$

$$\Rightarrow \Delta OA'B \text{ là tam giác đều.}$$

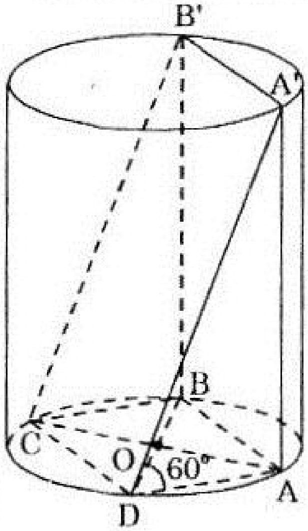
$\Rightarrow OH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow d\,(O, (ABA')) = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Vậy $d\,(OO', AB) = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Bài 7. Cho hình lăng trụ có hai đáy là hai đường tròn (O) và (O'); ABCD là hình vuông nội tiếp đường tròn (O). Dựng các đường sinh AA', BB'.

1. Chứng minh rằng A'B'CD là hình chữ nhật.
2. Cho bán kính đáy hình trụ là R, và (A'B'CD) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình trụ một góc 60^0.
   a) Tính thể tích khối trụ.
   b) Tính thể tích khối đa diện ABCDB'A'.

Giải



1. Ta có ABCD là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} AB = CD \\ AB \parallel CD \end{cases}$

Vì ABB'A' là hình chữ nhật $\Rightarrow \begin{cases} AB = A'B' \\ AB \parallel A'B' \end{cases}$

$\Rightarrow A'B' = CD$ và $A'B' \parallel CD$

$\Rightarrow$ A'B'CD là hình bình hành

$\left.\begin{array}{l}\text{Mặt khác : } CD \perp AD \text{ (do ABCD là hình vuông)} \\ \text{và lại có AD là hình chiếu của A'D trên mp (ABCD)}\end{array}\right\}$

$\Rightarrow A'D \perp CD$ (định lí ba đường vuông góc)

$\Rightarrow$ A'B'CD là hình chữ nhật.

2a) $\left.\begin{array}{l}\text{Ta có : } (A'B'CD) \cap (ABCD) = CD \\ \text{và có : } AD \perp CD \text{ và } A'D \perp CD \\ \qquad AD \subset (ABCD) \text{ và } A'D \subset (A'B'CD)\end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (A'B'CD) và mặt đáy hình trụ là góc :

$$(\widehat{A'D, DA}) = \widehat{A'DA} = 60^0$$

Vì ABCD là hình vuông nội tiếp đường tròn (O) có bán kính R

$\Rightarrow AD = R\sqrt{2}$

Xét $\Delta A'DA$ vuông tại A, ta có :

$$\tan 60^0 = \frac{AA'}{AD} \Rightarrow AA' = AD\tan 60^0 = R\sqrt{2}.\sqrt{3} = R\sqrt{6}$$

$\Rightarrow h = R\sqrt{6}$: chiều cao hình trụ

$\Rightarrow$ Thể tích khối trụ là : $V = B.h = \pi R^2.R\sqrt{6} = \pi R^3\sqrt{6}$.

b) $\left.\begin{array}{l}\text{Ta có : A'B', AB và CD đôi một song song nhau}\\ \text{và dễ thấy : (ADA') // (BCB')}\end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ Khối đa diện ABCDA'B' là hình lăng trụ : ADA'.BCB'

Mặt khác : $\left.\begin{array}{l}AB \perp BC \text{ (do ABCD là hình vuông)}\\ AB \perp BB'\end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (BCB')$

$\Rightarrow$ ADA'.BCB' là hình lăng trụ đứng.

Vậy $V_{ADA'.BCB'} = S_{ADA'}.AB = \frac{1}{2}AD.AA'.AB = \frac{1}{2}R\sqrt{2}.R\sqrt{6}.R\sqrt{2}$

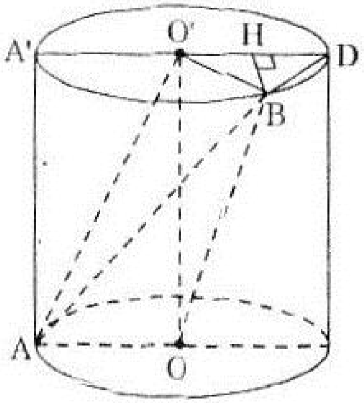
$= \frac{1}{2}.2\sqrt{6}R^3 = R^3\sqrt{6}$.

Bài 8. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho AB = 2a. Tính thể tích khối tứ diện OO'AB.

Giải

Kẻ đường sinh AA', và gọi D là điểm đối xứng của A' qua O'

$\left.\begin{array}{l}\text{Kẻ } BH \perp A'D \text{ tại H}\\ \text{và có } BH \perp AA'\end{array}\right\} \Rightarrow BH \perp (AOO'A')$



$\Rightarrow V_{OO'AB} = \frac{1}{3}BH.S_{AOO'}$

Xét $\Delta AA'B$ ta có :

$A'B = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Xét $\Delta A'BD$ vuông tại B ta có :

$BD = \sqrt{A'D^2 - A'B^2} = \sqrt{(2a)^2 - 3a^2} = a$

Vậy tam giác BO'D có BO' = O'D = BD = a $\Rightarrow$ $\Delta BO'D$ là tam giác đều có cạnh bằng a.

$\Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Delta AOO'$ vuông nên $S_{AOO'} = \frac{1}{2}AO.OO' = \frac{1}{2}a^2$.

Vậy thể tích khối tứ diện OO'AB là : $V = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

TOÁN TỰ LUYỆN

Bài 9. Mặt phẳng (P) đi qua trục của hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông có cạnh 2R.

1. Tính thể tích khối trụ.
2. Tính thể tích khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ.

(Hình lăng trụ nội tiếp hình trụ khi hình lăng trụ là hình lăng trụ đứng và đáy của nó nội tiếp đường tròn đáy của hình trụ).

Đáp số : 1. $V = 2\pi R^3$ 2. $V = 4R^3$.

Bài 10. Cho hình trụ có bán kính đáy là R và chiều cao cũng bằng R. Một hình vuông ABCD có hai cạnh AB và CD lần lượt là các dây cung của hai đường tròn đáy, còn hai cạnh AD và BC không phải là đường sinh của hình trụ.

1. Tính diện tích hình vuông ABCD.
2. Tính cosin của góc giữa mặt phẳng chứa hình vuông và mặt phẳng đáy.

Đáp số : 1. $S_{ABCD} = \dfrac{5R^2}{2}$ 2. $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

Bài 11. Cho hình trụ có bán kính đáy là a và chiều cao $a\sqrt{2}$. M và N là hai điểm di động trên hai đường tròn đáy sao cho góc của MN và đáy bằng 60^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và đường thẳng chứa trục hình trụ.

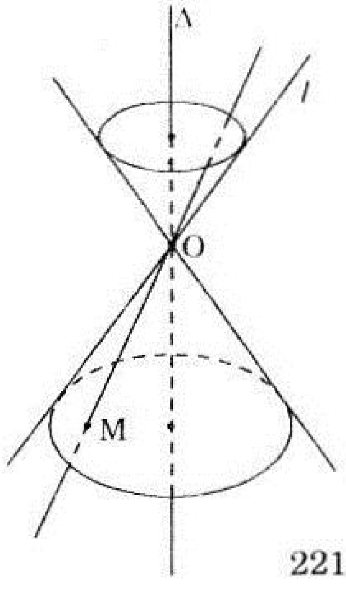
Đáp số : $\dfrac{a\sqrt{30}}{6}$.

Bài 12. Bên trong hình trụ có một hình vuông ABCD cạnh a, hai đỉnh A, B nằm trên đường tròn đáy tâm O; hai đỉnh C, D nằm trên đường tròn đáy tâm O'. Mặt phẳng chứa hình vuông tạo với đáy hình trụ một góc 45^0. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình trụ đó.

Đáp số : $S_{xq} = \dfrac{1}{2}\pi a^2\sqrt{3}$ (đvdt); $V = \dfrac{3}{16}\pi a^3\sqrt{2}$ (đvtt).

E MẶT NÓN – HÌNH NÓN – KHỐI NÓN

1. Định nghĩa mặt nón



- *Cho đường thẳng Δ. Xét đường thẳng l cắt Δ tại O và không vuông góc với Δ.*

  Mặt tròn xoay sinh ra bởi đường thẳng l như thế khi quay quanh Δ gọi là mặt nón tròn xoay (hay còn gọi là mặt nón).

- – *Δ : gọi là trục của mặt nón*
  – *l : gọi là đường sinh của mặt nón*
  – *O : đỉnh của mặt nón*

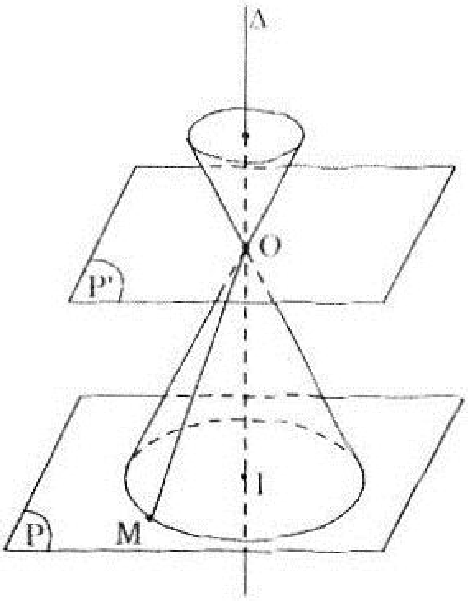
- *Gọi : $\alpha = (\widehat{l, \Delta})$ thì 2α là góc ở đỉnh của mặt nón ($0^0 < 2\alpha < 180^0$).*

Chú ý : *Nếu **M** là điểm tùy ý của mặt nón ($M \neq O$) thì đường thẳng **OM** nằm hoàn toàn trên mặt nón đó. Ta cũng có thể xem mặt nón đó sinh bởi đường thẳng OM khi quay quanh Δ, bởi vậy OM cũng được gọi là đường sinh của mặt nón đó.*

2. Hình nón và khối nón

- *Cho hình nón ($\mathscr{N}$) với trục là Δ, đỉnh O và góc ở đỉnh là 2α. Gọi I là điểm trên Δ ($I \neq O$) và hai mặt phẳng (P) và P') lần lượt vuông góc với Δ tại I và O. Mặt phẳng (P) cắt mặt nón theo đường tròn ($\mathscr{C}$) có tâm là I. Khi đó :*

  Phần của mặt nón ($\mathscr{N}$) giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (P') cùng với hình tròn xác định bởi ($\mathscr{C}$) được gọi là hình nón.



- - *Điểm O : đỉnh hình nón*
  - *Đường tròn ($\mathscr{C}$) : đường tròn đáy, hình tròn xác định bởi ($\mathscr{C}$) gọi là đáy của hình nón.*
  - *Với mỗi điểm M nằm trên đường tròn ($\mathscr{C}$), đoạn OM gọi là đường sinh của hình nón, các đường sinh của hình nón có độ dài bằng nhau.*
  - *Đoạn thẳng OI gọi là trục hình nón, độ dài đoạn OI gọi là chiều cao của hình nón (OI chính là khoảng cách từ O tới mặt đáy).*
- *Một hình nón chia không gian thành hai phần : Phần bên trong và phần bên ngoài của nó.*

  Hình nón cùng với phần bên trong của nó gọi là khối nón.

3. Diện tích hình nón và thể tích khối nón

- *Phần của mặt nón ($\mathscr{N}$) giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (P') đã nêu như trên được gọi là mặt xung quanh của hình nón ($\mathscr{N}$).*

$$\boxed{\begin{aligned} S_{xq} &= \pi R l \\ V_{khối\ nón} &= \frac{1}{3}Bh \end{aligned}}$$

Với :
- *R : bán kính hình tròn đáy*
- *l : độ dài đường sinh*
- *B : diện tích đáy*
- *h : chiều cao.*

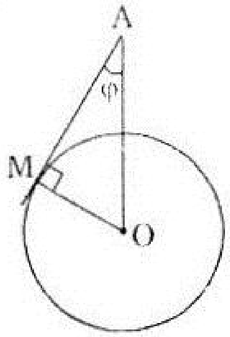
Dạng 1. Chứng minh đường thẳng d thuộc mặt nón

Ta thực hiện các bước :

- *Chứng minh d cắt đường thẳng Δ cố định tại một điểm O cố định và tạo với Δ một góc không đổi β.*
- *Suy ra d nằm trên mặt nón đỉnh O, trục Δ, góc ở đỉnh bằng 2β.*

Bài 1. Cho điểm A nằm ngoài mặt cầu (S). Chứng minh rằng các đường thẳng d đi qua A tiếp xúc (S) luôn nằm trên một mặt nón xác định.

Giải



Gọi O và R lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu (S).

Vì d qua A và tiếp xúc với (S) tại M ⇒ OM ⊥ d tại M.

Gọi $\varphi = \widehat{(OA, AM)}$

Xét ΔAOM vuông tại M, ta có :

$$\sin\varphi = \frac{OM}{OA} = \frac{R}{OA} \text{ hằng số.}$$

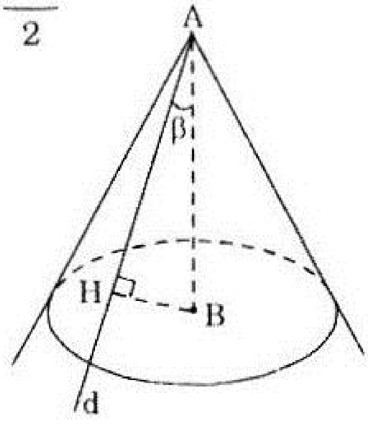
⇒ φ : không đổi

Vậy d qua A cố định và tạo với đường thẳng OA một góc φ không đổi.

⇒ d nằm trên một mặt nón cố định có đỉnh là A, trục OA và góc ở đỉnh bằng 2φ.

Bài 2. Cho hai điểm A, B cố định. Một đường thẳng d di động luôn qua A và cách B một đoạn không đổi $a = \frac{AB}{2}$. Chứng minh rằng d luôn nằm trên mặt nón tròn xoay.

Giải



Trong mp (d, AB) kẻ BH ⊥ d tại H ⇒ $BH = a = \frac{AB}{2}$

Và gọi $\beta = \widehat{BAH}$

Xét ΔBAH vuông tại H, ta có :

$$\sin\beta = \frac{BH}{AB} = \frac{AB}{2AB} = \frac{1}{2}$$

⇒ $\beta = 30^0$

Vậy d qua A cố định và tạo với AB một góc β không đổi.

⇒ d nằm trên mặt nón có đỉnh là A, trục là AB và góc ở đỉnh bằng $2\beta = 60^0$.

Dạng 2 Thiết diện – Diện tích xung quanh Thể tích và các yếu tố liên quan đến hình nón

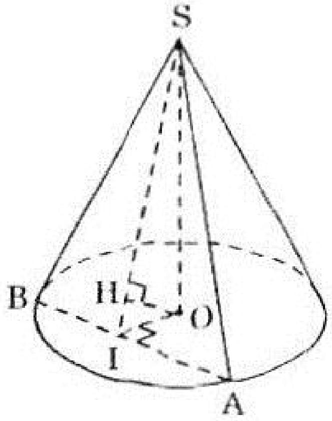
Thiết diện của hình nón cắt bởi một mặt phẳng qua đỉnh hình nón luôn là một tam giác cân tại đỉnh của hình nón.

Bài 3. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 2a$ và bán kính đáy $R = 5a$.

1. Tính diện tích xung quanh hình nón và thể tích khối nón tạo thành bởi hình nón đó.
2. Một thiết diện qua đỉnh hình nón có khoảng cách từ tâm O của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là a. Tính diện tích thiết diện đó.

Giải

1. Gọi SA là một đường sinh của hình nón và $SO = h = 2a$.



Xét ΔSOA vuông tại O, ta có :

$$SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{4a^2 + 25a^2} = a\sqrt{29}$$

$\Rightarrow$ Diện tích xung quanh của hình nón là :

$$S_{xq} = \pi Rl = \pi(5a)a\sqrt{29} = 5\sqrt{29}\pi a^2 \text{ (dvdt)}$$

Và thể tích khối nón là :

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(5a)^2.2a = \frac{50}{3}\pi a^3 \text{ (dvtt)}.$$

2. Giả sử thiết diện qua đỉnh S cắt đường tròn đáy tại A và B

$\Rightarrow$ Thiết diện là tam giác SAB cân tại S.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Gọi I là trung điểm của } AB \Rightarrow OI \perp AB \\ \text{mà có } SO \perp AB\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AB \perp (SOI) \\ \text{mà } AB \subset (SAB)\end{array}\right\} \Rightarrow (SAB) \perp (SOI \\ \qquad\qquad\qquad\quad \text{và } (SAB) \cap (SOI) = SI \\ \qquad\qquad\qquad\quad \text{Từ O vẽ } OH \perp SH \text{ tại H}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\Rightarrow OH \perp (SAB) \text{ tại H.} \\ \Rightarrow OH = d(O, (SAB))\end{array}$$

Vậy $OH = a$

Mặt khác ΔSOI vuông tại O, có OH là đường cao nên có :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{4a^2} \Leftrightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow OI^2 = \frac{4a^2}{3} \Rightarrow OI = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Xét ΔOIA vuông tại I có :

$$IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{25a^2 - \frac{4a^2}{3}} = \sqrt{\frac{71a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{71}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{213}}{3}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{2a\sqrt{213}}{3}.$$

Lại xét ΔSOI vuông tại O, có OH là đường cao nên có :

$$OH.SI = SO.OI \quad \Rightarrow SI = \frac{SO.OI}{OH} = \frac{2a.\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{a} \quad \Rightarrow SI = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow$ Diện tích thiết diện là :

$$S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}SI.AB = \frac{1}{2}\cdot\frac{4a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2a\sqrt{213}}{3} = \frac{4\sqrt{71}}{3}a^2 \text{ (đvdt).}$$

Bài 4. Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng (P) qua trục ta được một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 2a.

1. Tính diện tích xung quanh hình nón và thể tích khối nón tương ứng.
2. Cho dây cung BC của đường tròn đáy hình nón sao cho mp (SBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc 60°. Tính diện tích ΔSBC.

Giải

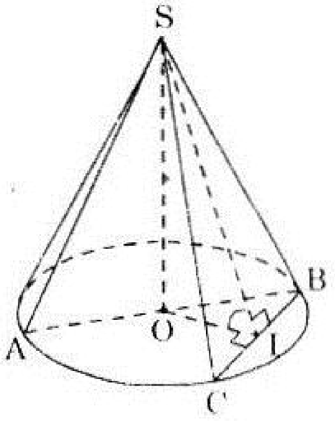
1. Giả sử cắt hình nón bởi mp (P) qua trục SO của hình nón được ΔSAB vuông $\Rightarrow \Delta SAB$ là tam giác vuông cân (do có SA = SB)

ΔSAB vuông cân tại S có cạnh huyền AB = 2a

mà $AB = SA\sqrt{2} \quad \Rightarrow SA = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$ (SA là đường sinh)

Ta lại có bán kính của đường tròn đáy là : $R = \frac{AB}{2} = \frac{2a}{2} = a$

Và chiều cao $SO = \frac{AB}{2} = a$



Vậy diện tích xung quanh hình nón là :

$$S_{xq} = \pi Rl = \pi a.a\sqrt{2} = \pi a^2\sqrt{2} \text{ (dvdt)}$$

Và thể tích khối nón là :

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi a^2.a = \frac{1}{3}\pi a^3 \text{ (dvtt).}$$

2. Gọi I là trung điểm BC $\Rightarrow OI \perp BC$

và $SI \perp BC$ (do ΔSBC là tam giác cân tại S)

⇒ góc giữa (SBC) và mặt phẳng chứa đáy hình nón là :

$$(\widehat{SI, OI}) = \widehat{SIO} = 60^0$$

Xét ΔSOI vuông tại O, ta có :

$$\sin 60^0 = \frac{SO}{SI} \Rightarrow SI = \frac{SO}{\sin 60^0} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Xét ΔSIB vuông tại I, ta có : $IB = \sqrt{SB^2 - SI^2} = \sqrt{2a^2 - \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$$\Rightarrow IB = \sqrt{2a^2 - \frac{4a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow BC = 2IB = \frac{2a\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy diện tích ΔSBC là :

$$S = \frac{1}{2}SI.BC = \frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2a\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^2 \text{ (dvdt)}.$$

Bài 5. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có các cạnh bên bằng a và góc giữa các mặt bên và mặt đáy bằng φ. Hình nón có đỉnh là S, có đường tròn đáy nội tiếp tam giác đều ABC gọi là hình nón nội tiếp hình chóp đã cho. Tính diện tích xung quanh hình nón theo a và φ.

Giải

Gọi I là trung điểm của BC và O là tâm của ΔABC.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Ta có A, O, I thẳng hàng và } OI \perp BC \\ \text{và cũng có } SI \perp BC\end{array}\right\}$$

⇒ góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC) là góc $(\widehat{SI, OI}) = \widehat{SIO} = \varphi$

đường tròn đáy của hình nón nội tiếp tam giác đều ABC

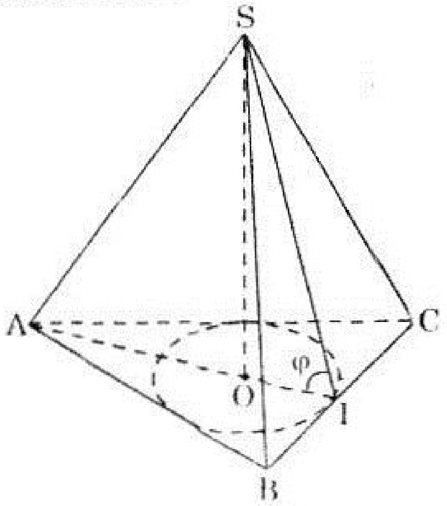
⇒ OI = R : bán kính đáy của hình nón.

⇒ OA = 2R

Xét các tam giác ΔSOI và ΔSOA vuông tại O, ta có :

- $\tan\varphi = \dfrac{SO}{OI} \Rightarrow SO = OI.\tan\varphi = R\tan\varphi$ (a)
- $SO^2 = SA^2 - OA^2 = a^2 - 4R^2$ (b)

Từ (a) và (b) cho : $R^2\tan^2\varphi = a^2 - 4R^2$



$$\Leftrightarrow (4 + \tan^2\varphi)R^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 = \frac{a^2}{4 + \tan^2\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{a}{\sqrt{4 + \tan^2\varphi}}$$

Ta có đường sinh hình nón là SI. Xét ΔSOI vuông tại O, ta có :

$$\cos\varphi = \frac{OI}{SI} \Rightarrow SI = \frac{OI}{\cos\varphi} = \frac{R}{\cos\varphi} = \frac{a}{\cos\varphi\sqrt{4 + \tan^2\varphi}}$$

Vậy diện tích xung quanh hình nón là :

$$S_{xq} = \pi Rl = \pi\frac{a}{\sqrt{4 + \tan^2\varphi}} \cdot \frac{a}{\cos\varphi\sqrt{4 + \tan^2\varphi}} = \frac{a^2}{\cos\varphi(4 + \tan^2\varphi)}.$$

Bài 6. Một mặt phẳng (P) đi qua hai đường sinh của hình nón cắt mặt đáy theo một dây cung có độ dài gấp 4 lần chiều cao của hình nón. Tính góc φ giữa mp (P) và mặt đáy của hình nón. Biết φ bằng nửa góc ở đỉnh của thiết diện hình nón khi cắt bởi mp (P).

Giải

Giả sử mp (P) qua hai đường sinh của hình nón là SA và SB.

Và gọi I là trung điểm của AB

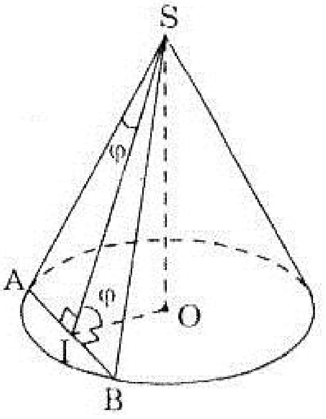
$\Rightarrow OI \perp AB$

mà OI là hình chiếu của SI trên mặt đáy hình nón

$\Rightarrow SI \perp OI$ (Định lí 3 đường vuông góc)

$\Rightarrow$ góc giữa mp (P) và mặt đáy hình nón là :

$$(\widehat{SI, IO}) = \widehat{SIO} = \varphi$$



Theo giả thiết $\widehat{SIO} = \widehat{ASI} = \varphi$

Xét ΔSIO vuông tại O, ta có : $\sin\varphi = \dfrac{SO}{SI}$ (a)

Xét ΔSAI vuông tại I, ta có : $\tan\varphi = \dfrac{AI}{SI} \Rightarrow SI = \dfrac{AI}{\tan\varphi}$ (b)

Thay (b) vào (a) cho ta : $\sin\varphi = \dfrac{SO.\tan\varphi}{AI}$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{SO}{AI} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \quad \Rightarrow \cos\varphi = \frac{SO}{AI} = \frac{SO}{\frac{1}{2}AB}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{SO}{\frac{1}{2}(4SO)} \quad \text{(do } AB = 4SO)$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \varphi = 60^0.$$

TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 7. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO; A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và góc $\widehat{SAO} = 30^0$; $\widehat{SAB} = 60^0$. Tính độ dài của đường sinh hình nón theo a.

Đáp số : $l = a\sqrt{2}$.

Bài 8. Cắt hình nón bằng một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một tam giác đều cạnh là 2a. Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích khối nón được tạo thành bởi hình nón đó

Đáp số : $S_{xq} = 2\pi a^2$; $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Bài 9. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao SO = h và góc $\widehat{SAB} = \varphi$ (với $\varphi > 45^0$). Tính diện tích xung quanh hình nón đỉnh là S và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông của hình chóp.

Đáp số : $S_{xq} = \dfrac{\pi\sqrt{2}h^2\cos\varphi}{1 - 2\cos^2\varphi}$.

Bài 10. Chứng minh rằng trong một hình nón tròn xoay, góc ở đỉnh là góc lớn nhất trong số các góc được tạo nên bởi hai đường sinh của khối nón đó.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

Bài 1. Trong mp (P) cho đường thẳng d và điểm A nằm ngoài đường thẳng d. Một góc $\widehat{xAy}$ di động quanh A, cắt d tại B và C. Trên đường thẳng Δ qua A, Δ vuông góc với (P) ta lấy điểm S. Gọi H và K là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC.

1. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, H và K cùng thuộc một mặt cầu (S).
2. Tính diện tích mặt cầu (S) và thể tích khối cầu (S), cho biết AB = 2, AC = 3 và $\widehat{BAC} = 60^0$.

Bài 2. Cho mặt cầu (S) có bán kính R = 2a. Từ một điểm I trên mặt cầu (S), dựng ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt cắt (S) tại ba điểm A, B, C sao cho IA = IB = IC và $\widehat{AIB} = \widehat{AIC} = \widehat{BIC} = \varphi$. Tính thể tích V khối tứ diện S.ABC theo a và φ.

Bài 3. Cho tam giác đều ΔABC cạnh a. Gọi (P) là mặt phẳng qua cạnh BC; mp (P) ⊥ mp (ABC). Gọi (C) là đường tròn đường kính BC trong mp (P) và S là điểm bất kì thuộc (C) (với S khác B, S khác C).

Khi S thay đổi trên (C). Chứng minh rằng :

1. $SA^2 + SB^2 + SC^2$ không đổi.
2. Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC là một điểm cố định.

Bài 4. Cho hình trụ có các đáy là hai đường tròn tâm O và O'; bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho AB = 2a.

Tính thể tích khối tứ diện OO'AB.

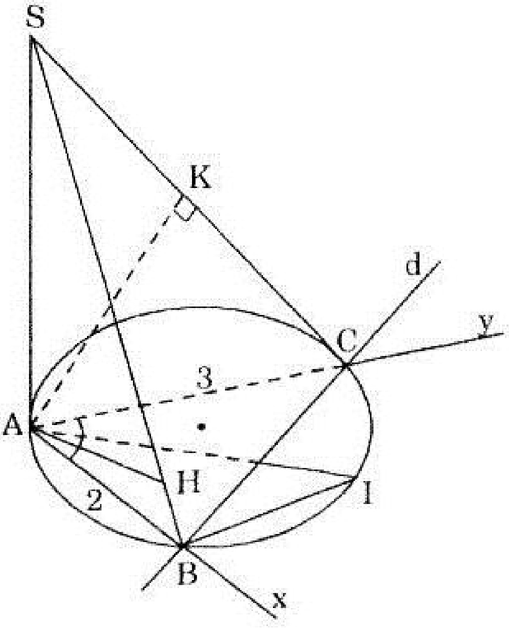
Bài 5. Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R và điểm M ở trên nửa đường tròn đó (M khác A và M khác B). Hình chiếu vuông góc của M trên AB là H với AH = x.

1. Tính theo R và x thể tích V của khối nón tạo thành khi cho ΔAMH (và các điểm bên trong) quay quanh AB.
2. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích V đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

1. Gọi AI là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.



Ta có : $\begin{cases} IB \perp AB \\ IB \perp SA \text{ (vì } SA \perp (P)) \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow IB \perp (SAB) \\ \text{mà } AH \subset (SAB) \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AH \perp IB \\ \text{mà có : } AH \perp SB \text{ (gt)} \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AH \perp (SBI) \\ \text{mà } IH \subset (SBI) \end{array}\right\}$

$\Rightarrow AH \perp HI \Rightarrow \widehat{AHI} = 1v$

Chứng minh tương tự $\widehat{AKI} = 1v$

Và dễ thấy $\widehat{ABI} = \widehat{ACI} = 1v$

$\Rightarrow$ A, B, C, H và K cùng nằm trên một mặt cầu (S) có đường kính là AI.

2. Xét ΔABC, ta có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 60^0 = 4 + 9 - 2.2.3.\frac{1}{2} = 7$$

$\Rightarrow BC = \sqrt{7}$

Mà theo định lí hàm số sin, ta có : $\dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = 2R$

$$\Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin 60^0} = \frac{\sqrt{7}}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

$\Rightarrow$ Diện tích mặt cầu (S) là : $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2 = \frac{28}{3}\pi$ (đvdt)

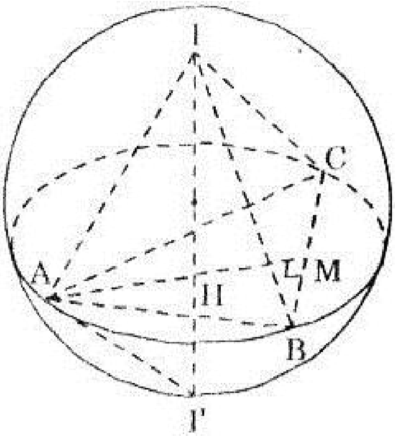
Và thể tích khối cầu (S) là :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^3 = \frac{4.21\sqrt{21}}{81}\pi = \frac{28}{27}\sqrt{21}\pi \text{ (đvtt)}.$$

Bài 2. Nhận xét $\Delta IAB = \Delta IBC = \Delta ICA$ (cạnh – góc – cạnh)

$\Rightarrow AB = BC = CA \Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều
và vì có $IA = IB = IC$

$\Rightarrow$ I.ABC là hình chóp tam giác đều
Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC



$\Rightarrow IH \perp (ABC)$ tại H

Và H cũng chính là hình chiếu của tâm mặt cầu (S) trên (ABC)

$\Rightarrow$ IH chứa đường kính của (S)

Gọi I' là giao điểm của IH và (S)

Vậy $\Delta IAI'$ vuông tại A $\Rightarrow IA^2 = IH.II'$

Đặt $IA = x \Rightarrow x^2 = IH.II' = IH.4a \Rightarrow IH = \frac{x^2}{4a}$

Xét ΔIAB ta có :

$$AB^2 = IA^2 + IB^2 - 2IA.IB\cos\varphi = x^2 + x^2 - 2x^2\cos\varphi = 2x^2 - 2x^2\cos\varphi$$

$$\Rightarrow AB^2 = 2x^2(1-\cos\varphi) \Rightarrow AB = x\sqrt{2(1-\cos\varphi)}$$

Vậy $S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{x^2(1-\cos\varphi).\sqrt{3}}{2}$

Mà : $V_{I.ABC} = \frac{1}{3}IH.S_{ABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{4a}\cdot\frac{x^2(1-\cos\varphi)\sqrt{3}}{2} = \frac{x^4(1-\cos\varphi)\sqrt{3}}{24a}$ (a)

Xét ΔAHI vuông tại H, ta có : $IA^2 = AH^2 + IH^2$ (*)

Do ΔABC là tam giác đều có cạnh $AB = x\sqrt{2(1-\cos\varphi)}$

$$\Rightarrow AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{2(1-\cos\varphi)}.\sqrt{3}}{2}$$

Và $AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\cdot\frac{x\sqrt{3}\sqrt{2(1-\cos\varphi)}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}x\sqrt{2(1-\cos\varphi)}$

Vậy $(*) \Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\sqrt{2(1-\cos\varphi)}\right)^2 + \frac{x^4}{16a^2}$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3}x^2(1-\cos\varphi) + \frac{x^4}{16a^2}$$

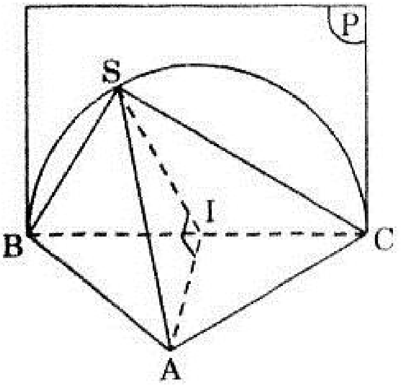
$$\Leftrightarrow 1 = \frac{2}{3}(1-\cos\varphi) + \frac{x^2}{16a^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{16a^2}{3}(1+2\cos\varphi) \qquad (b)$$

Thay (b) vào (a) ta được :

$$V_{I.ABC} = \frac{\left[\frac{16a^2}{3}(1+2\cos\varphi)\right]^2(1-\cos\varphi)\sqrt{3}}{24a}$$

$$= \frac{32}{27}\sqrt{3}\,.a^3(1+2\cos\varphi)^2(1-\cos\varphi).$$

Bài 3.



1. Gọi I là trung điểm BC

$\Rightarrow$ AI $\perp$ BC (do ΔABC là tam giác đều)

mà (P) $\perp$ (ABC)

(P) $\cap$ (ABC) = BC

AI $\subset$ (ABC)

$\Rightarrow$ AI $\perp$ (P) $\Rightarrow$ AI $\perp$ SI

$\Rightarrow$ ΔSAI vuông tại I $\Rightarrow SA^2 = SI^2 + AI^2$

Mặt khác do ΔSBC vuông tại S, có SI là đường trung tuyến

$\Rightarrow SI = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$ và có $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow SA^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = a^2$

Và cũng do ΔSBC vuông tại S $\Rightarrow SB^2 + SC^2 = BC^2 = a^2$

$$\Rightarrow SA^2 + SB^2 + SC^2 = 2a^2.$$

2. Ta có : ΔSBC là tam giác vuông tại S

mà I là trung điểm cạnh huyền BC

$\Rightarrow$ I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSBC

Mà theo chứng minh trên AI $\perp$ (P) hay AI $\perp$ (SBC)

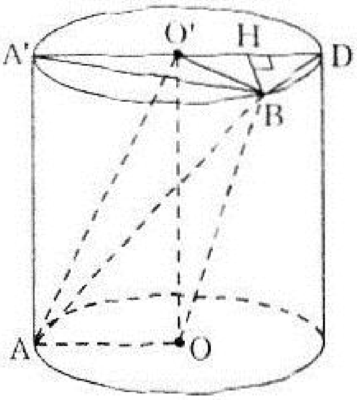
$\Rightarrow$ AI là trục đường tròn ngoại tiếp ΔSBC.

Vậy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là giao điểm K của AI và mặt phẳng trung trực (α) của cạnh AC.

Ta có : AI cố định, mp (α) cố định $\Rightarrow$ K cố định.

$\Rightarrow$ tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC là một điểm cố định.

Bài 4. Vẽ đường sinh AA'. Gọi D là điểm đối xứng của A' qua O' và H là hình chiếu vuông góc của B trên A'D.



Ta có : $\left.\begin{matrix} BH \perp AA' \\ BH \perp A'D \end{matrix}\right\} \Rightarrow BH \perp (AA'D) \equiv (O'OA)$

Vậy $V_{OO'AB} = V_{B.O'OA} = \frac{1}{3}BH.S_{\Delta OO'A}$

$$= \frac{1}{3}BH\left(\frac{1}{2}OO'.OA\right) = \frac{1}{6}BH.OO'.OA$$

Ta có : $A'B = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$ (do $\Delta AA'B$ vuông)

Xét $\Delta A'BD$ vuông tại B $\Rightarrow BD = \sqrt{A'D^2 - A'B^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$

Vậy $\Delta O'BD$ có : $O'B = O'D = BD = a \Rightarrow \Delta O'BD$ là tam giác đều cạnh a

$\Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{OO'AB} = \frac{1}{6}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}.a.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Bài 5.

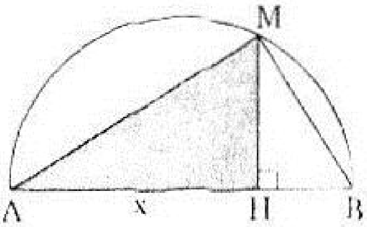
1. Khối nón tạo thành khi cho ΔAMH (và các điểm bên trong) quay quanh AB có bán kính đáy R = MH và chiều cao AH = x.

   Xét ΔAMB vuông tại M có chiều cao là MH, nên có :

   $$R^2 = MH^2 = AH.HB = AH.(AB - AH) = x(2R - x)$$

   Vậy thể tích khối nón là :

   $$V = \frac{1}{3}\pi R^2.AH = \frac{1}{3}\pi x^2(2R - x).$$



2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có :

   $$V = \frac{1}{3}\pi x^2(2R - x) = \frac{1}{3}\pi x.x(2R - x)$$

   $$= \frac{1}{6}\pi x.x(4R - 2x) \le \frac{\pi}{6}\left[\frac{x + x + (4R - 2x)}{3}\right]^3 = \frac{32\pi R^3}{81} \quad (*)$$

Dấu bằng xảy ra cho (*) $\Leftrightarrow \quad x = x = 4R - 2x$

$$\Leftrightarrow \quad 3x = 4R \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4R}{3}$$

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích $V = \frac{32\pi R^3}{81}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG IV

Câu 1. Cho hình chóp S.ABC có SA $\perp$ (ABC), đáy ABC là tam giác vuông tại B có AB = c; BC = a; SA = b. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là R bằng :

A. $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ B. $R = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

C. $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ D. $R = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Câu 2. Một hình hộp chữ nhật nội tiếp mặt cầu có 3 kích thước là a, b, c. Khi đó bán kính R của mặt cầu là :

A. $R = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$ B. $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

C. $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ D. $R = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

- *Giả thiết này dùng cho các câu 3, câu 4 và câu 5.*

  Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy là a và cạnh bên là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, G là trọng tâm của ΔSAI (với I là trung điểm BC), K là trung điểm SO.

Câu 3. Tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là điểm :

A. G B. O

C. K D. Một kết quả khác.

Câu 4. Chiều cao hình chóp là SO có độ dài :

A. $\frac{a\sqrt{84}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{15}}{6}$ C. $\frac{a\sqrt{84}}{12}$ D. $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

Câu 5. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC bằng :

A. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{3\sqrt{15}a}{20}$ D. $\frac{3a}{\sqrt{2}}$.

Câu 6. Cho mặt cầu (S) tâm O bán kính R = 5cm. Mp (P) cắt (S) theo một đường tròn có bán kính r = 2cm. Khoảng cách từ O đến mp (P) là :

A. $\sqrt{21}$ cm B. $\sqrt{22}$ cm

C. 3cm D. Kết quả khác.

- *Giả thiết này dùng cho các câu 7, câu 8, câu 9.*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông ở A và D; AD = CD = SA = a; AB = 2a; SA ⊥ (ABCD). Gọi E là trung điểm của AB.

Câu 7. Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là :

A. Trung điểm SC B. Trung điểm SB

C. $I \equiv E$ D. Một kết quả khác.

Câu 8. Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC là :

A. $R = \frac{a\sqrt{5}}{3}$ B. $R = a\sqrt{5}$ C. $R = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ D. $R = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 9. Từ trung điểm E của AB vẽ EF ⊥ SB tại F. Thể tích khối cầu tương ứng của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.AEFCD bằng V.

A. $V = \frac{4\pi\sqrt{5}a^3}{2}$ B. $V = 4\pi\sqrt{5}a^3$

C. $V = 4\pi\sqrt{3}a^3$ D. $V = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{2}$.

Câu 10. **Một hình trụ ($\mathcal{C}$) có bán kính đáy bằng R và có thiết diện qua trục là hình vuông. Diện tích xung quanh của khối trụ ($\mathcal{C}$) bằng :**

A. $S_{xq} = \frac{1}{2}\pi R^2$ B. $S_{xq} = \pi R^2$ C. $S_{xq} = 4\pi R^2$ D. $S_{xq} = 3\pi R^2$.

Câu 11. **Một hình trụ có diện tích xung quanh S_0, diện tích đáy bằng diện tích của một mặt cầu bán kính bằng a, khi đó thể tích của khối trụ bằng :**

A. $\frac{1}{2}aS_0$ B. aS_0 C. $\frac{1}{3}aS_0$ D. $2aS_0$.

Câu 12. **Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng 5cm, chiều cao bằng 5cm. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm B sao cho AB = 10cm. Tính thể tích khối tứ diện OO'AB.**

A. $\frac{125\sqrt{3}}{6}$ cm^3 B. $\frac{125\sqrt{3}}{12}$ cm^3

C. $125\sqrt{3}$ cm^3 D. $\frac{125\sqrt{3}}{4}$ cm^3.

Câu 13. Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng 4cm và thiết diện qua trục là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng :

A. 36π (cm^2) B. 32π (cm^2) C. 64π (cm^2) D. $64\pi^2$ (cm^2).

Câu 14. Một hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông, có diện tích xung quanh bằng 8π. Thể tích của khối trụ tương ứng là :

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ B. $\sqrt{2}\pi$ C. 4π D. $4\sqrt{2}\pi$.

Câu 15. Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt của hình lập phương cạnh a. Thể tích khối trụ đó là :

A. $\frac{\pi a^3}{4}$ B. $\frac{\pi a^3}{2}$ C. $\frac{\pi a^3}{3}$ D. πa^3.

Câu 16. Thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác cân có cạnh góc vuông bằng 4cm. Tính thể tích của khối nón.

A. $4\sqrt{2}$ cm^3 B. $8\sqrt{2}\pi$ cm^3 C. $6\sqrt{2}\pi$ cm^3 D. 8π cm^3.

Câu 17. Thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác đều cạnh 2a. Thể tích của khối nón là :

A. $\pi a^3\sqrt{3}$ B. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\pi a^3}{3}$ D. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 18. Cho khối nón có bán kính đáy R = 12cm và có góc ở đỉnh là $2\varphi = 120^0$. Độ dài đường sinh l của hình nón bằng :

A. $l = 12$cm B. $l = 24$cm C. $l = \frac{12}{\sqrt{3}}$ cm D. $l = \frac{24}{\sqrt{3}}$ cm.

Câu 19. Một hình nón có đường sinh bằng l và góc giữa đường sinh và đáy bằng α. Diện tích xung quanh của hình nón bằng :

A. $\pi l^2\sin\alpha$ B. $l^2\sin\alpha$ C. $\pi l^2\cos\alpha$ D. $l^2\cos\alpha$.

Câu 20. Cho hình nón có đường sinh $l = a$, diện tích xung quanh bằng $2\pi a^2$. Khi đó diện tích đáy bằng :

A. $4\pi a^2\sqrt{3}$ B. $4a^2\pi$ C. $2a^2\pi$ D. $a^2\pi$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1.A	2.B	3.D	4.B	5.C	6.A	7.B	8.C	9.D	10.C
11.B	12.B	13.C	14.D	15.A	16.B	17.B	18.D	19.C	20.B

MỤC LỤC

Chương I. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ SONG SONG

A. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG 3

Chủ đề 1. Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng 4

Chủ đề 2. Chứng minh nhiều điểm trong không gian thẳng hàng 7

Chủ đề 3. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy 8

Chủ đề 4. Chứng minh đường thẳng lưu động qua một điểm cố định. Tập hợp giao điểm của hai đường thẳng lưu động 9

Chủ đề 5. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi một mặt phẳng 12

Bài tập tổng hợp 13

Hướng dẫn giải 15

B. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG 22

Chủ đề 6. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (có yếu tố song song). Chứng minh hai đường thẳng song song 23

C. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG 34

Chủ đề 7. Chứng minh đường thẳng song song với một mặt phẳng 35

Chủ đề 8. Thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (có yếu tố đường thẳng song song với mặt phẳng) 37

D. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG 45

Chủ đề 9. Chứng minh hai mặt phẳng song song 46

Chủ đề 10. Hình lăng trụ – Hình hộp 52

Chủ đề 11. Phép chiếu song song 54

Bài tập tổng hợp 56

Hướng dẫn giải 57

Câu hỏi trắc nghiệm chương I 60

Đáp án câu hỏi trắc nghiệm 62

Chương II. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ VUÔNG GÓC

Chủ đề 12. Vectơ trong không gian. Sự đồng phẳng của các vectơ 63

Chủ đề 13. Góc giữa hai đường thẳng – Hai đường thẳng vuông góc 67

Chủ đề 14. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng 72
Chủ đề 15. Hai mặt phẳng vuông góc 85
Chủ đề 16. Hình chóp đều – Hình lăng trụ đứng – Hình hộp chữ nhật .. 92
Chủ đề 17. Khoảng cách 101
Câu hỏi trắc nghiệm chương II 111
Đáp án câu hỏi trắc nghiệm 113

Chương III. **KHỐI ĐA DIỆN**

Chủ đề 18. Khái niệm về khối đa diện 114
Chủ đề 19. Phép đối xứng qua mặt phẳng và sự bằng nhau của các khối đa diện 117
Chủ đề 20. Phép vị tự và sự đồng dạng của các khối đa diện. Các khối đa diện đều 125
Chủ đề 21. Thể tích khối chóp 131
  Dạng 1. Khối chóp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy 132
  Dạng 2. Hình chóp có mặt bên vuông góc với mặt đáy 139
  Dạng 3. Hình chóp đều 141
  Dạng 4. Thể tích khối chóp bằng phương pháp tỉ số thể tích 146
  Các bài toán khác 151
Chủ đề 22. Thể tích khối lăng trụ 160
  Dạng 1. Khối lăng trụ đứng và khối lăng trụ đều 160
  Dạng 2. Khối lăng trụ có cạnh bên không vuông góc với mặt đáy ... 164
  Dạng 3. Các bài toán liên quan đến tỉ số thể tích 168
Bài tập ôn chương III 173
Giải bài tập ôn chương III 174
Câu hỏi trắc nghiệm chương III 185
Đáp án câu hỏi trắc nghiệm 189

Chương IV. **MẶT CẦU – MẶT TRỤ – MẶT NÓN**

Chủ đề 23. Mặt cầu – Khối cầu 190
  Dạng 1. Chứng minh các điểm cùng nằm trên một mặt cầu 191
  Dạng 2. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, hình lăng trụ 198
  Dạng 3. Giao của mặt cầu và mặt phẳng. Giao của mặt cầu và đường thẳng 208
  Dạng 4. Tập hợp tâm của mặt cầu 213

Chủ đề 24. Khái niệm mặt tròn xoay 214
A. Mặt trụ – Hình trụ – Khối trụ 214
Dạng 1. Chứng minh đường thẳng d (hay điểm M) nằm trên mặt trụ 215
Dạng 2. Thiết diện – Diện tích xung quanh – Thể tích khối trụ 217
B. Mặt nón – Hình nón – Khối nón 221
Dạng 1. Chứng minh đường thẳng d thuộc mặt nón 223
Dạng 2. Thiết diện – Diện tích xung quanh. Thể tích và các yếu tố liên quan đến hình nón 224
Bài tập ôn chương IV 228
Giải bài tập ôn chương IV 229
Câu hỏi trắc nghiệm chương IV 233
Đáp án câu hỏi trắc nghiệm 235

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 39714896; (04) 39724770. Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: NGỌC LÂM

Trình bày bìa: NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

Đối tác liên kết xuất bản:
NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾT

Phương pháp giải toán Hình học không gian

Mã số: 1L – 177ĐH2009
In 2000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ty TNHH In Bao bì Phong Tân.
Số xuất bản: 69 – 2009/CXB/04 – 06/ĐHQGHN, ngày 20/1/2009.
Quyết định xuất bản số: 177LK-TN/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2009.

Mời bạn tìm đọc

***Nhà sách* PHƯƠNG**
Số 04 Lý Thái Tổ - Đà Nẵng * ĐT: 3823421

***Nhà sách* MINH TRÍ**
Số 103 Lý Thái Tổ - Đà Nẵng * ĐT: 3824452

***Nhà sách* LAM CHÂU**
Số 129 Phan Chu Trinh - Đà Nẵng * ĐT: 3821317

***Nhà sách* TRẦN QUỐC TUẤN**
Số 526 Quang Trung - Quảng Ngãi * ĐT: 3822067

***Nhà sách* GIÁO KHOA**
Số 341 Phan Chu Trinh - Tam Kì - Q.Nam * ĐT: 3851229

***Nhà sách* MINH TRÍ**
Số 278 Lê Hồng Phong - Quy Nhơn * ĐT: 3823453

***Nhà sách* NHÃ TRANG**
Số 124 Quốc lộ 1 - Ba Ngòi - Cam Ranh * ĐT: 3854496

***Nhà sách* VĂN NGHỆ**
Số 295 Đường 30/4 - Tây Ninh * ĐT: 3827249 - 6250336

***Nhà sách* GIÁO DỤC**
Số 19 Trường Chinh - Buôn Ma Thuột * ĐT: 3953408

***Nhà sách* SIÊU THỊ VĂN HÓA**
Số 06 Lê Lợi - Tp Pleiku - Gia Lai * ĐT: 3824340

***Nhà sách* QUANG TRUNG**
Số 32 Hoàng Văn Thụ - An Khê - Gia Lai * ĐT: 3832218

***Nhà sách* VĂN HÓA VINH**
Số 343 Lê Duẩn - Tp Vinh - Nghệ An * ĐT: 3558582

***Nhà sách* VĂN HÓA THANH HÓA**
Số 27 - 29 Đại lộ Lê Lợi - Tp Thanh Hóa * ĐT: 6252088

***Nhà sách* SIÊU THỊ VĂN HÓA TAM KÌ**
Số 24 Trần Cao Vân - Tam Kì - Quảng Nam * ĐT: 3825539

***Nhà sách* SIÊU THỊ VĂN HÓA QUẢNG NGÃI**
Số 204 Nguyễn Nghiêm - Tp Quảng Ngãi * ĐT: 6250144